



Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática



Superfícies mínimas folheadas por circunferências

Dissertação de Mestrado

Lauriclécio Figueiredo Lopes

Prof. Dr. Valério Ramos Batista

Orientador

18 de fevereiro de 2005

Superfícies mínimas folheadas por circunferências

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lauriclécio Figueiredo Lopes** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de fevereiro de 2005.

Prof. Dr. Valério Ramos Batista
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Valério Ramos Batista.
2. Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino.
3. Prof. Dr. Francesco Mercuri.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em **Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Lopes, Lauriclecio Figueiredo

L881s Superfícies mínimas folheadas por circunferências / Lauriclecio
Figueiredo Lopes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Valério Ramos Batista

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Geometria diferencial. 3. Riemann,
Superfícies de. I. Ramos Batista, Valério. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título.

Título em inglês: Minimal surfaces foliated by circumferences

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Minimal surfaces. 2. Differential geometry. 3.
Riemann surfaces.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Mestre em matemática

Banca examinadora: 1. Prof. Dr. Valério Ramos Batista (UNICAMP)
2. Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (UNICAMP)
3. Prof. Dr. Francesco Mercuri (UNICAMP)

Data da defesa: 18/02/2005

**Dissertação de Mestrado defendida em 18 de Fevereiro de 2005 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Valério Ramos Batista

Prof. (a). Dr (a). VALÉRIO RAMOS BATISTA

Francesco Mercuri

Prof. (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

Paulo Régis Caron Ruffino

Prof (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

Dedico este trabalho a meus pais,
Lauri Lopes de Figueiredo e Maria da Conceição de Figueiredo,
pela confiança depositada em mim durante minha vida acadêmica.

Agradecimentos

A Deus pela fidelidade comigo durante estes anos.

Ao Prof. Valério Ramos Batista, por sua dedicação e sua enorme paciência.

Ao meu pai Lauri, a minha mãe Neta, a meus irmãos Iêndes e Taislon, e a minha “maninha” Valéria. *Só Deus poderá recompensar-vos.*

Aos colegas: Bibiana, Dadan, Fabiano, Dimas, Marcelo, Rubens, João, e principalmente a Viviane Moretto da Silva, Fábio José Bertoloto, Rinaldo Vieira da Silva Júnior, Antônio Pereira Brandão Júnior, Ederson Moreira dos Santos e Simão Nicolau Stelmastchuk, pela ajuda e amizade.

Aos colegas e ex-colegas da República “Clube dos 9”: Andrielber, Marcos, Emerson, Zeca, Flávio, Daniel, Diego, Ygor, Marcelo, Glaúcio e principalmente Fábio BG.

A Ana Cristina, Érica e Fernanda Perla. *Que mesmo de longe, me ajudaram a superar momentos difíceis, principalmente por meio de orações.*

Aos professores da graduação: Rosana, Marco Aurélio, Luiz Mendes e Claudianor, por me incentivarem a enfrentar o mestrado.

A George Dourado Loula, pelo incentivo e por confiar sua casa quando cheguei em Campinas.

A Cidinha e Tânia, pela ajuda na SPG do IMECC.

A Capes pelo apoio financeiro.

A todos vocês, meu muito obrigado.

Resumo

Entende-se por superfícies mínimas aquelas cuja curvatura média é nula. Têm-se como exemplos clássicos o catenóide, o helicóide e a superfície de Scherk. Historicamente, elas estão relacionadas com minimização de área, porém quando realiza-se uma variação normal incluindo os bordos, a superfície original com curvatura média nula pode representar uma área localmente máxima. Em certos casos de variação com bordo fixo, tem-se realmente a minimização do funcional área.

No espaço euclidiano tridimensional, o Teorema da Representação de Weierstrass expressa uma superfície mínima em termos de integrais envolvendo uma função holomorfa e uma meromorfa. A partir desta meromorfa pode-se deduzir a aplicação normal de Gauss. Conceitos como curvatura Gaussiana, curvatura total, superfícies completas e regularidade também são utilizados para deduzir propriedades das superfícies mínimas.

Quando estudamos as superfícies mínimas para as quais o bordo consiste de duas circunferências disjuntas, os Teoremas de Enneper e Shiffman, o Princípio de Reflexão de Schwarz e a unicidade do Problema de Björling são ferramentas importantes para a dedução das soluções, a saber, o catenóide e as superfícies de Riemann. Estas apresentam simetrias por reflexão a um plano e invariância por rotação de 180 graus em torno de uma reta. A função “P de Weierstrass” simétrica é de grande utilidade no estudo destas propriedades.

Abstract

Minimal surfaces are known to be the ones with mean curvature zero. Classical examples are the catenoid, helicoid and the Scherk surface. Historically, they were associated with the property of minimizing area. However, they can even maximize it locally for cases of normal variation which include the boundary. For fixed boundary, we shall analyse when they really minimize the area functional.

In the three-dimensional Euclidean space, the Weierstrass Representation Theorem expresses any minimal surface S by means of integrals with a holomorphic and a meromorphic functions, usually denoted by f and g , respectively. The unitary normal N of S is fully determined by g . Concepts like “Gaussian curvature”, “total curvature”, “completeness” and “regularity” are also employed in order to read off some properties of minimal surfaces.

Concerning the case for which the boundary of S consists of two disjoint circumferences, Enneper’s and Shiffman’s Theorems, The Schwarz’s Reflection Principle and the Börling’s Problem are fundamental tools to characterize the solutions, namely the catenoid and the Riemann’s examples. All these are invariant by a reflectional symmetry in a plane, and also by a rotation of 180-degree around a straight line. The symmetric Weierstrass-P-function is very useful to deduce these properties.

Conteúdo

Introdução	1
Organização do trabalho	2
1 Superfícies mínimas: definições e resultados gerais	3
1.1 Teoria local	3
1.1.1 Superfícies que minimizam e maximizam áreas em \mathbb{R}^3	9
1.1.2 Representação das superfícies por EDPs	13
1.1.3 Parâmetros isotérmicos	14
1.2 Teoria global	17
1.3 Superfícies em \mathbb{R}^3	21
1.3.1 A aplicação de Gauss	21
1.3.2 Curvaturas de Gauss e Total	26
2 Superfícies mínimas folheadas por circunferências	34
2.1 Considerações teóricas	35
2.1.1 O Princípio da Reflexão de Schwarz para Superfícies Mínimas	38
2.1.2 O problema de Björling	42
2.2 A solução de Riemann	44
2.2.1 As superfícies de Riemann	53

2.2.2	As simetrias da superfície de Riemann	55
3	Superfícies mínimas especiais	65
3.1	O Catenóide	66
3.2	O Helicóide	68
3.3	A superfície de Scherk	73
	Referências Bibliográficas	75

Introdução

Desde o século XVIII, o nome superfície mínima vem sendo relacionado a superfícies de curvatura média nula, pois a condição $H = 0$ deve ser satisfeita pelas superfícies que minimizam área com uma dada fronteira.

A teoria de curvatura seccional começou com a investigação de Euler [11] em 1760, a respeito de seções planas de uma dada superfície. A primeira vez que a expressão $2H = k_1 + k_2$ apareceu foi no trabalho de Meusnier [12], onde k_1 e k_2 denotam as curvaturas principais.

A relação de curvatura média nula e superfícies mínimas não-paramétricas foi provada implicitamente por Lagrange em 1760. Após 16 anos, Meusnier usou a expressão analítica da curvatura média e determinou dois exemplos mínimos, o catenóide e o helicóide.

Em 1825, Gauss publicou um trabalho cujo principal resultado é que todo pedaço suficientemente pequeno de uma superfície regular, real e analítica pode ser aplicado conformemente sobre um domínio do plano. Gauss também provou que a curvatura Gaussiana é dada por $K = k_1 k_2$ e introduziu a curvatura total $\int_S K dA$.

Scherk descobriu novas superfícies mínimas em 1831 usando o método de separação de variáveis. Em 1842, Catalan mostrou que a única superfície mínima regrada, a menos do plano, é o helicóide.

Um novo período na teoria de superfícies mínimas iniciou-se em 1865 com a solução do problema de Plateau por Schwarz no caso em que a curva fronteira é um quadrilátero espacial não-planar e regular. Em 1867 resolveu-se o caso em que a fronteira é dada pela mesma curva, porém sem a condição de regularidade (ver [13]).

Entre os anos 1900 e 1925 nenhum grande progresso foi realizado na teoria de superfi-

cies mínimas não-paramétricas, exceto pelo trabalho de Neovius sobre superfícies mínimas periódicas. A partir de 1950 os problemas de valores de contorno para superfícies mínimas passaram a ser de grande interesse. Na década de 60, DeGiorgi, Fleming, Federes e Reiffenberg desenvolveram uma ferramenta em Teoria Geométrica da Medida que vem sendo cada vez mais importante no estudo de superfícies mínimas.

No início dos anos 80, a teoria de superfícies mínimas completas e periódicas ganhou cada vez mais espaço. Isto se deve particularmente a Costa, Hoffman e Meeks, que contestaram a conjectura de que as únicas superfícies mínimas mergulhadas em \mathbb{R}^3 com topologia finita seriam o plano, o catenóide e o helicóide. Esta conjectura é falsa pois existe uma mínima completa $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é o toro quadrado \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 com três pontos removidos. Esta superfície foi descoberta por Costa [14]. Sua Representação de Weierstrass utiliza as funções $f = \wp$ e $g = \frac{a}{\wp'}$, em que \wp é a função de Weierstrass, \wp' sua derivada e $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma constante. Depois, muitas superfícies similares foram descobertas, tanto que hoje a teoria encontra-se em constante desenvolvimento.

Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em três capítulos.

No primeiro, começaremos com uma rápida revisão dos conceitos básicos em Geometria Diferencial, depois trataremos de uma teoria mais geral, envolvendo variedades diferenciais. Finalizaremos este capítulo discutindo alguns resultados que envolvem superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , a aplicação e a curvatura de Gauss.

No Capítulo 2 discutiremos as superfícies mínimas folheadas por circunferências. Iniciaremos com algumas considerações teóricas, depois demonstraremos o resultado de Enneper, no qual garante-se que não existem superfícies mínimas folheadas por circunferências em planos não-paralelos. Na segunda seção, determinaremos as soluções de Riemann que satisfaçam o resultado de Enneper, a saber o catenóide e as superfícies de Riemann. Encerraremos este capítulo com um estudo das simetrias destas superfícies.

Por fim, no Capítulo 3 provaremos que o catenóide é a única superfície mínima de revolução, que o helicóide é a única regrada e também a única harmônica, e a superfície de Scherk é a única de translação, no sentido que possui uma folheação por curvas em planos verticais que diferem apenas pela terceira coordenada.

Capítulo 1

Superfícies mínimas: definições e resultados gerais

1.1 Teoria local

Seja \mathbb{R}^n o espaço euclidiano n -dimensional. Seja Ω um domínio, isto é, um aberto conexo do \mathbb{R}^2 . Definimos uma *superfície* S em \mathbb{R}^n como sendo o par (F, Ω) , onde Ω é o domínio e F é uma aplicação de classe C^2

$$\begin{aligned} F : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto F(x, y). \end{aligned}$$

Sejam Δ um subdomínio de Ω tal que $\partial\Delta$ é o traço de uma curva simples e fechada γ e \tilde{S} a superfície definida pela restrição de F a Δ . Queremos saber quais propriedades a superfície \tilde{S} tem, se ela possui a menor área entre todas as superfícies \tilde{S}_λ definidas por aplicações de classe C^2

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\lambda : \quad \Delta &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto \tilde{F}_\lambda(x, y) \end{aligned}$$

tais que $\tilde{F}_\lambda|_{\{\gamma\}} \equiv F|_{\{\gamma\}}$.

Antes de responder a esta questão, daremos algumas definições básicas que serão importantes para nosso estudo.

Dizemos que a superfície S definida por (F, Ω) é regular num ponto se F_x e F_y são

linearmente independentes neste ponto, ou equivalentemente, se $\det G > 0$, em que

$$G = DF^t \cdot DF, \quad (1.1)$$

e $DF = [F_x \ F_y]_{n \times 2}$. A superfície S será *regular* se ela é regular em todos os pontos de Ω .

A *área* de uma superfície S é dada por:

$$\mathbb{A}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det G} \, dx \, dy. \quad (1.2)$$

Definição 1.1 *Uma superfície é dita estar na forma não-paramétrica se pode ser escrita como $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, onde $f = (f^3, \dots, f^n)$.*

O lema seguinte, cuja demonstração encontra-se em [1], justificará algumas afirmações que se seguirão no decorrer deste trabalho.

Lema 1.2 *Sejam S uma superfície e p um ponto regular em S . Então existe uma vizinhança Δ de p tal que a superfície \tilde{S} obtida pela restrição F a Δ possui uma reparametrização \hat{S} na forma não-paramétrica.*

Quando queremos estudar o comportamento de uma superfície na vizinhança de um ponto, faz-se necessário conhecer o comportamento das curvas contidas na superfície que passam pelo ponto em questão. Uma *curva* C contida em S é uma aplicação γ contínua e diferenciável dada por

$$\begin{aligned} \gamma : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = F(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Temos que o vetor tangente a C definido no ponto $t_0 \in (\alpha, \beta)$ é dado pela equação

$$\gamma'(t_0) = F_x \cdot x'(t_0) + F_y \cdot y'(t_0). \quad (1.3)$$

Uma curva C é regular em t_0 se $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Se considerarmos o conjunto de todas as curvas que pertencem a S e passam pelo ponto $\gamma(t_0) = F(x(t_0), y(t_0))$, então a totalidade de seus vetores tangentes no ponto forma um espaço vetorial bidimensional, chamado *plano tangente* à superfície S em $\gamma(t_0)$ e é denotado por $T_{\gamma(t_0)}(S)$. O complemento ortogonal é chamado *espaço normal* a S em $\gamma(t_0)$, denotado

por $T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp$, e sua dimensão é sempre $(n - 2)$. Um vetor arbitrário $N \in T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp$ é chamado de *vetor normal* a S e possui a propriedade de ser ortogonal a F_x e F_y .

Outro conceito fundamental para o estudo de superfícies que minimizam área e que merece um pouco mais de atenção é o conceito de curvatura média.

Defina

$$B(N)_{2 \times 2} = D^2 F \cdot N = \begin{bmatrix} F_{xx} \cdot N & F_{xy} \cdot N \\ F_{yx} \cdot N & F_{yy} \cdot N \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Considere as Primeira e Segunda Formas Fundamentais para superfícies, dadas por $\varphi'(t)^\dagger \cdot B(N) \cdot \varphi'(t)$ e $\varphi'(t)^\dagger \cdot G \cdot \varphi'(t)$, respectivamente, onde $\varphi'(t) = [x'(t) \ y'(t)]^\dagger$. Considere agora

$$\frac{\varphi'(t)^\dagger \cdot B(N) \cdot \varphi'(t)}{\varphi'(t)^\dagger \cdot G \cdot \varphi'(t)}. \quad (1.5)$$

Temos que o numerador é uma forma quadrática no vetor tangente φ' e cuja matriz $B(N)$ depende do ponto da superfície e do vetor normal N . Sua homogeneidade nas componentes de φ' mostra que ele depende somente da direção de um vetor tangente unitário T . Desta forma, podemos reescrever (1.5) como

$$k(N, T) = \frac{\varphi'(t)^\dagger \cdot B(N) \cdot \varphi'(t)}{\varphi'(t)^\dagger \cdot G \cdot \varphi'(t)}, \quad N \in T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp, \quad T \in S^1 \subset T_{\gamma(t_0)}(S), \quad (1.6)$$

que é em cada ponto de S uma função bem definida em N e em T . A grandeza $k(N, T)$ é chamada *curvatura normal de S* na direção T com respeito a N . Os valores máximo e mínimo de $k(N, T)$, com N fixo e T percorrendo uma circunferência unitária, são chamados de *curvaturas principais*, denotados respectivamente por $k_1(N)$ e $k_2(N)$.

A *curvatura média* $H(N)$ de S no ponto, com respeito a N , é definida por

$$H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2}. \quad (1.7)$$

Vamos encontrar uma expressão explícita para $H(N)$ que será utilizada posteriormente. Notamos que a expressão (1.5) é quociente de formas quadráticas. Logo, seu máximo e seu mínimo são as raízes da equação

$$\det (B(N) - \lambda G) = 0. \quad (1.8)$$

De fato, como G é simétrica e definida positiva, então existe uma única $G^{\frac{1}{2}}$ que é definida positiva e simétrica. Portanto de (1.6) temos

$$k(N, T) = \frac{\varphi'(t)^t \cdot (G^{\frac{1}{2}})^t \cdot (G^{-\frac{1}{2}})^t \cdot B(N) \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(t)}{\varphi'(t)^t \cdot (G^{\frac{1}{2}})^t \cdot (G^{\frac{1}{2}}) \cdot \varphi'(t)} = \frac{\phi^t \cdot M \cdot \phi}{\phi^t \cdot \phi} = \tilde{\phi}^t \cdot M \cdot \tilde{\phi},$$

onde $\phi = G^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(t)$, $M = (G^{-\frac{1}{2}})^t \cdot B(N) \cdot G^{-\frac{1}{2}}$ e $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\|\phi\|}$. Como $B(N)$ é simétrico, $M^t = M$. Sejam

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

$g(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1 = 0$ e $f(X, Y) = \tilde{\phi}^t M \tilde{\phi}$. Usando multiplicadores de Lagrange temos:

$$\begin{cases} f_X - \lambda g_X = 0; \\ f_Y - \lambda g_Y = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

É fácil ver que

$$f_X = 2[1 \ 0] M [X \ Y]^t, \quad f_Y = 2[0 \ 1] M [X \ Y]^t,$$

$$g_X = 2X, \quad g_Y = 2Y.$$

Logo, de (1.9) segue-se

$$\begin{bmatrix} f_X & - & \lambda g_X \\ f_Y & - & \lambda g_Y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - 2\lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$(M - \lambda Id_{2 \times 2}) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por isto, $\det(M - \lambda Id) = 0$, e assim,

$$\det(G^{\frac{1}{2}}) \cdot \det\left((G^{-\frac{1}{2}}) \cdot B(N) \cdot G^{-\frac{1}{2}} - \lambda Id\right) \cdot \det(G^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\det\left(G^{\frac{1}{2}} \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot B(N) \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}} - \lambda G^{\frac{1}{2}} \cdot Id \cdot G^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$\det(B(N) - \lambda G) = 0.$$

Expandindo esta equação temos

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(G^{-1} \cdot B(N)) + \det(G^{-1} \cdot B(N)) = 0.$$

Portanto

$$H(N) = \frac{\text{tr}(G^{-1} \cdot B(N))}{2}. \quad (1.10)$$

Segue-se imediatamente de (1.4) que $B(N)$ é linear em N , e de (1.10) que $H(N)$ é linear em N . Assim, existe um único vetor $H \in T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp$ tal que

$$H(N) = H \cdot N. \quad (1.11)$$

O vetor H assim definido é chamado *vetor curvatura média* de S .

Considere $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp$. Temos que o vetor H pode ser escrito como

$$H = \sum_{k=1}^{n-2} \pi_k(H) e_k, \quad (1.12)$$

em que $\pi_k(H)$ é a projeção de H na sua k -ésima coordenada em relação a base $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$.

Podemos agora definir o tipo de superfície que é o objeto de nosso estudo.

Definição 1.3 *Uma superfície S é uma superfície mínima se seu vetor curvatura média H for nulo em todos os pontos.*

Em virtude de (1.11) e (1.12), $H = 0$ se, e somente se $H(N) = 0$, para qualquer $N \in T_{\gamma(t_0)}(S)^\perp$. Assim, usando (1.10), as superfícies mínimas são caracterizadas por

$$\text{tr}(G^{-1} \cdot B(N)) = 0, \quad (1.13)$$

ou equivalentemente,

$$[(F_y \cdot F_y)F_{xx} + (F_x \cdot F_x)F_{yy} - 2(F_x \cdot F_y)F_{xy}] \cdot N = 0. \quad (1.14)$$

Agora que vimos alguns conceitos básicos, podemos responder nossa questão inicial. Considere um vetor normal N de $F(x, y)$. Suponhamos que $N(x, y) \in C^1$ em Ω . Vale que

$$N \cdot F_x \equiv N \cdot F_y \equiv 0$$

Assim, diferenciando $DF \cdot N = 0$ pela regra do produto e usando o Teorema de Schwarz obtemos

$$DF \cdot DN = -D^2F \cdot N = -B(N). \quad (1.15)$$

Logo, considerando uma função arbitrária $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^2$, para cada número real λ formamos uma superfície \tilde{S}_λ dada por:

$$\tilde{F}_\lambda = F + \lambda h N.$$

Desta forma obtemos

$$D\tilde{F}_\lambda = DF + \lambda h DN + \lambda NDh$$

e como $\tilde{G} = D\tilde{F}_\lambda^t \cdot D\tilde{F}_\lambda$, temos

$$\tilde{G} = G - 2hB(N)\lambda + \mathcal{C}\lambda^2,$$

onde \mathcal{C} é contínua em $(x, y) \in \Omega$. Portanto,

$$\det \tilde{G} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad (1.16)$$

onde

$$a_0 = \det G, \quad a_1 = -2h \cdot \text{tr}(G_{adj} \cdot B(N)) \quad (1.17)$$

e a_2 é uma função contínua de x, y e λ para $(x, y) \in \Omega$.

Como S é regular, temos que cada superfície \tilde{S}_λ é ainda regular se $|\lambda|$ é menor que um certo $\varepsilon > 0$, pois ainda teremos $\det \tilde{G} > 0$.

Para calcular a área de cada \tilde{S}_λ , $\mathbb{A}(\tilde{S}_\lambda)$, notemos que em vista de (1.16) e da definição da série de Taylor obtemos

$$\left| \sqrt{\det \tilde{G}} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda \right) \right| < M\lambda^2 \quad (1.18)$$

para $(x, y) \in \Delta \subset \Omega$, onde M é uma constante positiva.

Usando a definição de área (1.2) e a expressão (1.17) segue-se que

$$\mathbb{A}(\tilde{S}_0 = \tilde{S}) = \iint_{\Delta} \sqrt{a_0} \, dxdy.$$

Assim, integrando (1.18)

$$\left| \iint_{\Delta} \sqrt{\det \tilde{G}} \, dxdy - \iint_{\Delta} \sqrt{a_0} \, dxdy - \iint_{\Delta} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda \, dxdy \right| \leq \iint_{\Delta} M\lambda^2 \, dxdy,$$

portanto, considerando $\mathbb{A}(\tilde{S}_\lambda) = \mathbb{A}(\lambda)$ temos

$$\left| \frac{\mathbb{A}(\lambda) - \mathbb{A}(\tilde{S})}{\lambda} - \iint_{\Delta} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \, dxdy \right| \leq M_1\lambda.$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 0$, substituindo (1.17) para a_0 e a_1 e a fórmula (1.10) para curvatura média, chegamos em

$$\mathbb{A}'(\tilde{S}) = -2 \iint_{\Delta} H(N) h(x, y) \sqrt{\det G} \, dx dy. \quad (1.19)$$

Se $f(x, y)$ é uma função arbitrária contínua de $(x, y) \in \overline{\Delta}$, podemos definir a integral de f com respeito a área da superfície em \tilde{S} como

$$\iint_{\tilde{S}} f(x, y) dA = \iint_{\Delta} f(x, y) \sqrt{\det G} \, dx dy \quad (1.20)$$

Com esta consideração, se escolhermos nossa família de superfícies \tilde{S}_λ com $h(x, y) \equiv 1$, então a equação (1.19) reduz-se a

$$\mathbb{A}'(\tilde{S}) = -2 \iint_{\tilde{S}} H(N) \, dA.$$

Podemos agora fazer a seguinte afirmação: *A fim de que \tilde{S} seja um ponto crítico de área, sua curvatura média deve ser identicamente zero.* Com efeito, se $H(N) \neq 0$, existe $p \in \Omega$ e um normal $N(p) = N$ tal que $H(N) \neq 0$. Assuma $H(N) > 0$. Logo, existe uma vizinhança V_1 de p e $N(x, y) \in C^1$ em V_1 tal que $N(x, y)$ é normal à S em $F(x, y)$. Então teremos $H(N) > 0$ numa vizinhança V_2 , $p \in V_2 \subseteq V_1$. Se escolhermos a função h tal que $h(p) > 0$, $h(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \in V_2$ e $h(x, y) = 0$ para $(x, y) \notin V_2$, obteremos

$$\mathbb{A}'(\tilde{S}) = -2 \iint_{\Delta} H(N) h(x, y) \sqrt{\det G} \, dx dy < 0$$

em V_2 . Entretanto, se V_2 é suficientemente pequeno tal que $V_2 \subset \Delta$, então $\tilde{F}(x, y) = F(x, y)$ em γ e \tilde{S}_λ será uma superfície com a mesma fronteira de \tilde{S} . A afirmação de que \tilde{S} é ponto crítico de área implica $\mathbb{A}'(\tilde{S}) = 0$. Portanto chegamos a uma contradição e a afirmação está provada.

1.1.1 Superfícies que minimizam e maximizam áreas em \mathbb{R}^3

Como vimos, existe uma relação entre a propriedade de otimizar área e a curvatura média ser nula. Mostraremos agora que se os bordos das superfícies são livres, então S maximiza área. Em contrapartida, se os bordos estão fixos e $H = 0$, S minimiza área

caso seja um gráfico. Este último resultado apresenta uma versão mais geral que pode ser encontrada em [3].

1° caso: *Se os bordos estão livres e $H = 0$, então S maximiza área.*

Considere Ω um domínio do \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ e a superfície S definida pela função

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) = (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

Temos que o vetor normal unitário N é dado por

$$N(x, y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Considere as superfícies geradas pela variação normal $F^r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por

$$F^r(x, y) = F(x, y) + rN(x, y), \quad r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

O volume da camada entre a superfície S e a obtida após a variação normal F^r é dado por

$$V_\epsilon = \int_0^\epsilon \int_\Omega \left| \det \begin{bmatrix} F_x^r & F_y^r & N \end{bmatrix} \right| dA dr.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário para integração obtemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V_\epsilon}{\epsilon} = \int_\Omega \left| \det \begin{bmatrix} F_x^0 & F_y^0 & N \end{bmatrix} \right| dA = \int_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA.$$

Denotemos por DF^r a matriz

$$\begin{bmatrix} F_x^r & F_y^r \end{bmatrix}$$

e por DN a matriz $\begin{bmatrix} N_x & N_y \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, de modo que

$$DF_{3 \times 2}^r = DF + rDN.$$

Temos $DN_{3 \times 2} = DF_{3 \times 2} \cdot \mathcal{S}_{2 \times 2}$, onde \mathcal{S} é o operador de Weingarten, ou seja,

$$DN = \begin{bmatrix} F_x & F_y \end{bmatrix} [\mathcal{S}].$$

Assim

$$DF^t \cdot DN = DF^t \cdot DF \cdot \mathcal{S},$$

ou seja,

$$\mathcal{S} = G^{-1} \cdot DF^t \cdot DN.$$

Logo, \mathcal{S} é simétrica e

$$\begin{aligned}
 \det^2 [DF^r \quad N] &= \det^2 [DF (Id + r\mathcal{S}) \quad N] \\
 &= \det \left[\begin{pmatrix} (Id + r\mathcal{S}^t) \cdot DF^t \\ N^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DF \cdot (Id + r\mathcal{S}) & N \end{pmatrix} \right] \\
 &= \det \begin{pmatrix} (Id + r\mathcal{S}^t) \cdot DF^t \cdot DF \cdot (Id + r\mathcal{S}) & 0 \\ 0 & N^t \cdot N \end{pmatrix} \\
 &= (\det G) [\det (Id + r\mathcal{S})]^2,
 \end{aligned}$$

pois $N^t \cdot N = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}(F^r(\Omega)) &= \int_{\Omega} \sqrt{\det G} |\det (Id + r\mathcal{S})| dA \\
 &= \int_{\Omega} \sqrt{\det G} |1 + r \operatorname{tr} \mathcal{S} + r^2 \det \mathcal{S}| dA.
 \end{aligned}$$

Para r suficientemente pequeno,

$$\mathbb{A}(F^r(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det G} (1 + r \operatorname{tr} \mathcal{S} + r^2 \det \mathcal{S}) dA.$$

Sendo assim

$$\left. \frac{\partial \mathbb{A}(F^r(\Omega))}{\partial r} \right|_{r=0} = \int_{\Omega} \sqrt{\det G} \operatorname{tr} \mathcal{S} dA.$$

Temos que $\mathbb{A}(F^0(\Omega))$ é ponto crítico se, e somente se $\operatorname{tr} \mathcal{S} = 0$. Mas $\operatorname{tr} \mathcal{S} = 2H$. Vamos examinar qual o tipo de ponto crítico nós temos. Neste caso, $H = 0$. Assim $\det (Id + r\mathcal{S}) = 1 + r^2 \det \mathcal{S}$. Como \mathcal{S} é um operador simétrico, possui base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, tal que

$$\mathcal{S}_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} k_{\max} & 0 \\ 0 & k_{\min} \end{pmatrix}.$$

Assim, se $\det \mathcal{S} = 0$, a superfície é um plano. Caso contrário, teremos $\det \mathcal{S} < 0$, pois $k_{\max} = -k_{\min}$. Assim, $1 + r^2 \det \mathcal{S} < 1$. Logo, para $r > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\mathbb{A}(F^r(\Omega)) < \mathbb{A}(F(\Omega)).$$

Portanto a superfície maximiza área se deixarmos o bordo livre.

2º caso: Se os bordos da superfície estão fixos e $H = 0$, então S minimiza área.

Considere o domínio Ω , a função $f : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ e a superfície S definida pela função F , como no primeiro caso.

Façamos uma variação $f + th$, $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, $h(x, y) \in C^2$ em Ω e $h|_{\partial\Omega} = 0$. Temos assim

$$\mathbb{A}(t) = \iint_{\Omega} \sqrt{a + bt + ct^2} \, dxdy,$$

onde $a = 1 + f_x^2 + f_y^2$, $b = 2(f_x h_x + f_y h_y)$ e $c = h_x^2 + h_y^2$. Ou seja,

$$a + bt + ct^2 = 1 + (f + th)_x^2 + (f + th)_y^2.$$

A série de Taylor de $\sqrt{a + bt + ct^2}$ em $t = 0$ é dada por:

$$\sqrt{a + bt + ct^2} = \sqrt{a} + \frac{bt}{2\sqrt{a}} - \frac{(b^2 - 4ac)t^2}{8\sqrt{a}^3} + Mt^3,$$

em que M é uma função de classe C^∞ de a , b , c e t . Logo

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'(t)|_{t=0} &= \iint_{\Omega} \frac{b}{2\sqrt{a}} \, dxdy = \iint_{\Omega} \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{a}} \, dxdy \\ &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \cdot \frac{f_x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \cdot \frac{f_y}{\sqrt{a}} \right) \right\} \, dxdy \\ &\quad - \iint_{\Omega} h \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{a}} \right) \right] \, dxdy. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \cdot \frac{f_x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \cdot \frac{f_y}{\sqrt{a}} \right) \right\} \, dxdy = 0,$$

pois $h|_{\partial\Omega} = 0$. Portanto

$$\mathbb{A}'(0) = - \iint_{\Omega} h \left[\left(\frac{f_x}{\sqrt{a}} \right)_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{a}} \right)_y \right] \, dxdy.$$

Como h é arbitrária, $\mathbb{A}'(0) = 0$ se, e somente se $\left(\frac{f_x}{\sqrt{a}} \right)_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{a}} \right)_y = 0$, ou equivalentemente, $\Delta f + \mathcal{H}_{adj}(\nabla f) = 0$. Vamos analisar que tipo de ponto crítico é este. Temos que

$$\mathbb{A}''(t)|_{t=0} = \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{4ac - b^2}{\sqrt{a}^3} \, dxdy,$$

onde $4ac - b^2 = 4(f_x h_y - f_y h_x)^2 + 4h_x^2 + 4h_y^2 \geq 0$. Mas $4ac - b^2 = 0$ se, e somente se $h_x = h_y = 0$, ou seja, $h = 0$. Logo, é ponto de mínimo local, como queríamos.

1.1.2 Representação das superfícies mínimas por equações diferenciais parciais

Nesta seção deduziremos uma expressão em termos de equações diferenciais parciais que representará as superfícies mínimas na forma não-paramétrica.

Como vimos, superfícies na forma não-paramétrica são definidas por $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, onde $f = (f^3, \dots, f^n)$ e consideramos $f^1(x, y) = x$ e $f^2(x, y) = y$.

Seja S uma superfície em \mathbb{R}^n definida por $F(x, y)$. Temos então que

$$F_x = (1, 0, f_x^3, \dots, f_x^n) \text{ e } F_y = (0, 1, f_y^3, \dots, f_y^n) \quad (1.21)$$

são linearmente independentes. Portanto, toda superfície na forma não-paramétrica é regular.

Tome $N = (N_1, \dots, N_n)$ um vetor normal, assim a equação (1.14) para superfícies mínimas reescreve-se como

$$\sum_{k=3}^n \left[\left(1 + \sum_{m=3}^n (f_y^m)^2 \right) f_{xx}^k - 2 \left(\sum_{m=3}^n f_x^m \cdot f_y^m \right) f_{xy}^k + \left(1 + \sum_{m=3}^n (f_x^m)^2 \right) f_{yy}^k \right] \cdot N_k = 0$$

para qualquer vetor normal N .

Uma vez que as componentes N_3, \dots, N_n podem ser escolhidas arbitrariamente, vide [1], segue-se que cada um dos coeficientes de N_k deve-se anular para $k = 3, \dots, n$. Obtemos assim $(n - 2)$ equações para as $(n - 2)$ funções f^3, \dots, f^n .

Estas equações podem ser escritas sucintamente do seguinte modo:

$$(1 + \|f_y\|^2) f_{xx} - 2(f_x \cdot f_y) f_{xy} + (1 + \|f_x\|^2) f_{yy} = 0. \quad (1.22)$$

A fórmula (1.22) é a equação de superfícies mínimas na forma não-paramétrica em \mathbb{R}^n . Outra forma de escrever esta equação é

$$\Delta f + \mathcal{H}_{adj}(\nabla f) = 0, \quad (1.23)$$

onde \mathcal{H} é a hessiana de f .

No caso $n = 3$ temos os exemplos clássicos de superfícies mínimas:

1. O *Helicóide*, única solução que é harmônica e também a única superfície mínima regrada,

$$f(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

2. O *Catenóide*, única superfície mínima que também é uma superfície de rotação,

$$f(x, y) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. A *Superfície de Scherk*, única superfície mínima que também é invariante por translação,

$$f(x, y) = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right).$$

A prova de que estas superfícies satisfazem a equação (1.22) são cálculos simples, enquanto que as unicidades serão mostradas no Capítulo 3.

1.1.3 Parâmetros isotérmicos

Ao escolhermos os parâmetros utilizados na definição das superfícies, devemos usar aqueles cujas propriedades geométricas da superfície sejam refletidas no plano de parametrização. Tal procedimento facilita o estudo de certas propriedades apresentadas pela superfície que independam da parametrização.

Parâmetros com esta propriedade são analiticamente expressos por

$$g_{11} = g_{22} \quad \text{e} \quad g_{12} = 0, \tag{1.24}$$

ou

$$G = \lambda^2 Id, \quad \text{em que } \lambda = \lambda(u, v) > 0 \tag{1.25}$$

onde g_{ij} são as entradas da matriz G . Parâmetros u e v satisfazendo estas condições são chamados *parâmetros isotérmicos*.

O lema a seguir, demonstrado em [1], garante a reparametrização da superfície usando parâmetros isotérmicos em certa condição.

Lema 1.4 *Seja S uma superfície mínima. Todo ponto regular de S possui uma vizinhança na qual existe reparametrização de S em termos de parâmetros isotérmicos.*

Um outro resultado envolvendo parâmetros isotérmicos é dado pela lema abaixo, no qual obtemos uma expressão para o Laplaciano do vetor coordenada para uma superfície arbitrária.

Lema 1.5 *Seja S uma superfície regular definida por $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$, $F \in C^2$ e onde u e v são parâmetros isotérmicos. Então $\Delta F = 2\lambda^2 H$, onde H é o vetor curvatura média.*

Demonstração: De (1.24) e de (1.1) temos

$$F_u \cdot F_u = F_v \cdot F_v \quad \text{e} \quad F_u \cdot F_v = 0.$$

Diferenciando a primeira igualdade com respeito a u e a segunda com respeito a v temos:

$$F_{uu} \cdot F_u = F_{uv} \cdot F_v = -F_{vv} \cdot F_u.$$

Portanto

$$\Delta F \cdot F_u = 0.$$

De modo semelhante, diferenciando a primeira com respeito a v e a segunda igualdade com respeito a u , obtemos

$$\Delta F \cdot F_v = 0.$$

Assim, ΔF é um vetor perpendicular ao plano tangente a S . Mas se N é um vetor normal arbitrário a S , então

$$\Delta F \cdot N = F_{uu} \cdot N + F_{vv} \cdot N = \text{tr } B(N).$$

De (1.10) temos $H(N) = \frac{\text{tr } B(N)}{2\lambda^2}$. Logo

$$\Delta F \cdot N = 2\lambda^2 H(N).$$

Isto significa que $\frac{\Delta F \cdot N}{2\lambda^2}$ é um vetor normal que satisfaz a definição da equação (1.11) do vetor curvatura média H , e de sua unicidade segue-se que $\Delta F = 2\lambda^2 H$. ■

Como consequência obtemos o seguinte resultado:

Lema 1.6 *Se $F(u, v) \in C^2$ define uma superfície regular S em parâmetros isotérmicos, então para que as funções coordenadas $f^k(u, v)$ sejam harmônicas é necessário e suficiente que S seja uma superfície mínima.*

Demonstração: Segue direto do Lema 1.5, observando apenas que $\Delta F = 0$ se, e somente se $H = 0$. ■

Mais adiante veremos que as funções harmônicas são de grande importância no contexto de superfícies mínimas. Isto nos motiva a encontrar uma relação entre funções harmônicas e superfícies mínimas.

Dada uma superfície definida por $F(u, v) = (f^1(u, v), \dots, f^n(u, v))$, consideremos as funções complexas

$$\phi_k(\zeta) = f_u^k - i f_v^k; \quad \zeta = u + iv. \quad (1.26)$$

Desta notação, obtemos as identidades:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) &= \sum_{k=1}^n (f_u^k)^2 - \sum_{k=1}^n (f_v^k)^2 - 2i \sum_{k=1}^n f_u^k \cdot f_v^k \\ &= \|F_u\|^2 - \|F_v\|^2 - 2i F_u \cdot F_v. \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^n (f_u^k)^2 + \sum_{k=1}^n (f_v^k)^2 = \|F_u\|^2 + \|F_v\|^2. \quad (1.28)$$

As equações (1.27) e (1.28) implicam diretamente as seguintes propriedades das funções $\phi_k(\zeta)$:

- a) $\phi_k(\zeta)$ é analítica em ζ se, e somente se f^k é harmônica em u e v ;
- b) u e v são parâmetros isotérmicos se, e somente se

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) = 0; \quad (1.29)$$

- c) se u e v são parâmetros isotérmicos, então S é regular se, e somente se

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0. \quad (1.30)$$

Destas propriedades temos o seguinte resultado, demonstrado em [1], que envolve superfícies mínimas e funções complexas:

Lema 1.7 *Seja S uma superfície mínima regular definida por $F(u, v)$, com u e v parâmetros isotérmicos. Então as funções $\phi_k(\zeta)$ definidas em (1.26) são analíticas e satisfazem (1.29) e (1.30). Reciprocamente, sejam $\phi_1(\zeta), \dots, \phi_n(\zeta)$ funções analíticas de ζ que satisfazem (1.29) e (1.30) num domínio simplesmente conexo Ω . Então existe uma superfície mínima regular $F(u, v)$ definida sobre Ω tal que (1.26) é válido.*

1.2 Teoria global

Nesta seção, discutiremos algumas definições e resultados que envolvem superfícies mínimas paramétricas no caso em que elas são cobertas por vizinhanças parametrizadas como na seção anterior.

Enunciaremos algumas definições importantes neste contexto.

1. Uma *n-variedade topológica*, ou *variedade n-dimensional*, é um espaço de Hausdorff, onde cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um domínio do \mathbb{R}^n .
2. Um atlas \mathcal{A} para uma *n-variedade* M é uma coleção de triplas $(R_\alpha, O_\alpha, \varphi_\alpha)$, onde R_α é um domínio em \mathbb{R}^n , O_α é um aberto em M , φ_α é um homeomorfismo de R_α em O_α e a união de todos os O_α é igual a M . Cada tripla é chamada de “carta”.
3. Uma variedade M é orientável se possui um atlas para o qual cada transformação $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ preserva orientação onde for definida. Uma orientação de M é a escolha de um tal atlas.
4. Uma estrutura C^r em M é um atlas para o qual $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta \in C^r$ onde for definida. Uma estrutura conforme em M é um atlas para o qual $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ é uma aplicação conforme.
5. Sejam M uma *n-variedade* com estrutura C^r e atlas \mathcal{A} , e \tilde{M} uma *m-variedade* com uma estrutura C^r e atlas $\tilde{\mathcal{A}}$. Uma aplicação $g : M \rightarrow \tilde{M}$ será chamada aplicação C^p , denotada por $g \in C^p$, $p \leq r$, se cada aplicação $\varphi_\beta^{-1} \circ g \circ \varphi_\alpha \in C^p$.
6. Uma superfície S de classe C^r em \mathbb{R}^n é uma variedade bidimensional M com uma estrutura C^r , juntamente com uma aplicação $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r .

O Axioma da Escolha garante que \mathcal{A} pode conter todas as cartas C^r de M , e por isso vamos considerá-lo sempre assim, isto é, maximal. Outras definições serão dadas no decorrer do texto.

Sejam S uma superfície C^r em \mathbb{R}^n , \mathcal{A} o atlas associado à variedade bidimensional M , R_α um domínio no plano uv e R_β um domínio no plano $\tilde{u}\tilde{v}$. Então a composição de φ_α com F é uma aplicação de R_α em \mathbb{R}^n que define uma superfície local no sentido já visto. A aplicação correspondente $F(\tilde{u}, \tilde{v})$ de R_β em \mathbb{R}^n define uma superfície local obtida de $F(u, v)$ por uma mudança de parâmetros $(u, v)((\tilde{u}, \tilde{v})) = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$. Assim todas propriedades locais

das superfícies que são independentes de parâmetros são bem definidas numa superfície global S dada pela definição acima. Em particular, por um *ponto* de S devemos entender o par $(p_0, F(p_0))$ onde p_0 é um ponto de M e podemos falar de S sendo regular num ponto, ou do plano tangente e o vetor curvatura média de S num ponto, etc.

As propriedades globais de S serão definidas simplesmente por serem aquelas de M . Assim, S será chamada orientável se M for orientável, uma orientação para S é uma orientação de M e similarmente para as propriedades topológicas de S .

Consideraremos que todas as superfícies serão conexas e orientáveis. Se a superfície é não-orientável, tomamos o recobrimento duplo orientável de M .

Discutiremos agora algumas noções básicas relacionadas com estrutura conforme. Se M possui uma estrutura conforme, podemos definir todos os conceitos que são invariantes sobre aplicação conforme. Em particular, podemos falar de funções harmônicas em M e aplicações complexas analíticas de M numa outra \tilde{M} .

Uma função meromorfa em M é uma aplicação analítica complexa de M na esfera de Riemann. Definimos a esfera de Riemann por $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com estrutura conforme dada por um par de aplicações φ_1 e φ_2 ,

$$\varphi_1(u, v) = \frac{1}{|w|^2 + 1}(2u, 2v, |w|^2 - 1), \quad w = u + iv; \quad (1.31)$$

$$\varphi_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{|\tilde{w}|^2 + 1}(2\tilde{u}, 2\tilde{v}, 1 - |\tilde{w}|^2), \quad \tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}; \quad (1.32)$$

A aplicação φ_1^{-1} é dada por

$$\varphi_1^{-1}(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} \quad (1.33)$$

e $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ é simplesmente uma função conforme e sobrejetora de $0 < |\tilde{w}| < \infty$ em $0 < |w| < \infty$ que leva w em $\frac{1}{w}$. Também será útil introduzirmos a projeção estereográfica

$$\Gamma : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ tal que } \begin{cases} \Gamma|_{S^2 \setminus \{(0,0,1)\}} = \varphi_1^{-1}; \\ \Gamma((0,0,1)) = \infty. \end{cases} \quad (1.34)$$

Definição 1.8 *Uma superfície mínima generalizada S em \mathbb{R}^n é uma aplicação não-constante $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde M é uma variedade bidimensional com uma estrutura conforme*

definida por uma atlas $\mathcal{A} = \{(R_\alpha, O_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, tal que cada função coordenada F^k de F é harmônica em M , e além disso

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) = 0, \quad (1.35)$$

onde tomamos para cada α arbitrário

$$\psi^k(\zeta) = F^k(\varphi_\alpha(\zeta)), \quad \phi_k(\zeta) = \psi_\xi^k - i\psi_\eta^k \quad e \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Observe que nesta definição, como F é não-constante, temos que em S pelo menos uma das funções F^k é não-constante, implicando que a função analítica correspondente ϕ_k só pode ter zeros isolados. Assim a equação

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k^2(\zeta)| = 0 \quad (1.36)$$

só acontece em pontos isolados. Novamente pelo Lema 1.7, se eliminarmos esses pontos isolados, o restante de S será uma superfície mínima regular. Os pontos que satisfazem a equação (1.36) são chamados *pontos de ramificação* da superfície.

Consideraremos a partir de agora que as superfícies mínimas são generalizadas ou regulares.

Definição 1.9 *Seja M uma n -variedade com estrutura C^r definida por uma atlas \mathcal{A} . Uma estrutura Riemanniana em M , ou uma métrica C^q Riemanniana, é uma coleção de matrizes G_α , definidas positivas em cada ponto e cada entrada são funções de classe C^q em O_α , $0 \leq q \leq r-1$, e tal que para qualquer α, β para os quais a aplicação $(u, v)((\tilde{u}, \tilde{v})) = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ é definida, a relação*

$$G_\beta = U^t G_\alpha U \quad (1.37)$$

se verifica, onde U é a matriz jacobiana da transformação $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$.

Uma *curva diferenciável* em M é uma aplicação diferenciável γ de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M . O *comprimento da curva* γ com respeito a uma dada métrica Riemanniana é definido por

$$\int_a^b h(t) dt,$$

em que para cada t_0 , $a \leq t_0 \leq b$, escolhemos um O_α tal que $\gamma(t_0) \in O_\alpha$ e tomamos

$$h(t) = \left([u' \ v'] \cdot G_\alpha \cdot [u' \ v']^t \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.38)$$

para t suficientemente próximo de t_0 , u e v coordenadas em R_α .

Por (1.37) a definição de $h(t)$ é independente da escolha de O_α .

Um *caminho divergente* em M é uma aplicação contínua $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$, $t \rightarrow \gamma(t)$, tal que para todo subconjunto compacto Q de M existe t_0 com $\gamma(t) \notin Q$ para $t > t_0$.

Se um caminho divergente é diferenciável, definimos seu *comprimento* por

$$\int_0^\infty h(t) dt, \quad (1.39)$$

onde $h(t)$ é novamente definido por (1.38).

Definição 1.10 *Uma variedade M é completa com respeito a uma dada métrica Riemanniana se a integral (1.39) diverge para todo caminho divergente diferenciável em M .*

Definição 1.11 *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada Variedade Riemanniana.*

Seja S uma superfície C^r em \mathbb{R}^n definida por uma imersão $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Logo, F induz uma estrutura Riemanniana em M , em que para cada α , tomamos $F(u, v) = F(\varphi_\alpha(u, v))$ e definimos G_α por

$$G_\alpha = DF^t \cdot DF. \quad (1.40)$$

Com G_α definida positiva em cada ponto onde S é regular. Obtemos assim que para cada superfície regular S em \mathbb{R}^n corresponde uma variedade bidimensional Riemanniana M . Dizemos que S é completa se M é completa com respeito à métrica Riemanniana definida por (1.40).

Suponhamos agora que S é mínima. Então existe \tilde{S} simplesmente conexa, chamada recobrimento universal de S , definida pela aplicação composta $F \circ \pi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde a aplicação $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é recobrimento universal de M . Assim, muitas questões a respeito de superfícies mínimas podem ser estabelecidas por considerar somente o caso simplesmente conexo, visto que qualquer estrutura em M induz uma estrutura correspondente em \tilde{M} .

Para finalizar esta seção enuciaremos dois lemas que apresentam resultados simples.

Lema 1.12 *Se $S = (F, M)$ é uma superfície mínima generalizada, então $F(M)$ não pode ser compacto.*

Demonstração: Como S é uma superfície mínima generalizada, pelo Lema 1.4, S admite um atlas C^ω e pelo Lema 1.6, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que F^1, \dots, F^n são harmônicas neste atlas. Se $F(M)$ fosse compacto, cada F^j assumiria um máximo para algum $p_j \in M$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Mas F^j é harmônica e assim deveria ser constante, o que é uma contradição. ■

Corolário 1.13 *M não pode ser compacta.*

Lema 1.14 *Toda superfície mínima simplesmente conexa S possui uma reparametrização na forma $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde Ω é o disco unitário ou o plano inteiro.*

A título de informação, podemos classificar os casos de Ω no Lema 1.14, conforme a definição abaixo.

Definição 1.15 *Uma variedade bidimensional M com uma estrutura conforme é chamada hiperbólica se existe uma função sub-harmônica não-constante e negativa em M . Caso contrário, diz-se que M é parabólica.*

A saber, o disco unitário é hiperbólico e o plano é parabólico, ver [[1],p52].

1.3 Superfícies em \mathbb{R}^3

Nesta seção estudaremos algumas propriedades das superfícies paramétricas em \mathbb{R}^3 . Estas propriedades serão obtidas com auxílio da aplicação e curvatura de Gauss, e também por meio da curvatura total. Na primeira subseção discutiremos os resultados envolvendo a aplicação de Gauss, enquanto que na segunda, os resultados relacionados com as curvaturas.

1.3.1 A aplicação de Gauss

Considere a equação

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (1.41)$$

Enunciaremos três lemas cujas demonstrações se encontram em [1] e que serão úteis na prova de alguns resultados posteriormente enunciados.

Lema 1.16 *Sejam Ω um domínio no plano complexo, g e f funções definidas em Ω tais que g é meromorfa e f é analítica tendo a seguinte propriedade: se p é polo de ordem m de g , então p é zero de f de ordem pelo menos $2m$. Neste caso, as funções*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad e \quad \phi_3 = fg \quad (1.42)$$

são analíticas em Ω e satisfazem (1.41). Reciprocamente, toda tripla de funções analíticas em Ω satisfazendo (1.41) pode ser representada na forma (1.42), exceto para $\phi_1 = i\phi_2$ e $\phi_3 \equiv 0$.

Teorema 1.17 (Representação de Weierstrass) *Toda superfície mínima simplesmente conexa em \mathbb{R}^3 pode ser representada na forma*

$$F^k(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\zeta \phi_k(z) dz \right\} + c_k; \quad k = 1, 2, 3; \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (1.43)$$

onde as ϕ_k são definidas por (1.42), as funções f e g possuem a propriedade afirmada no Lema 1.16 e o domínio Ω sendo ou o disco unitário ou o plano inteiro. A superfície será regular se, e somente se f só se anula nos pólos de g e a ordem de seus zeros é exatamente o dobro da ordem dos pólos de g .

Deduziremos agora uma outra expressão para (1.43), bastante conhecida. Observe que

$$F^1(\zeta) = c_1 + \operatorname{Re} \int_0^\zeta \frac{1}{2} f(1 - g^2) dz,$$

$$F^2(\zeta) = c_2 + \operatorname{Re} \int_0^\zeta \frac{i}{2} f(1 + g^2) dz,$$

$$F^3(\zeta) = c_3 + \operatorname{Re} \int_0^\zeta f g dz.$$

Tomando

$$h' = fg,$$

temos

$$dh = fg dz.$$

Logo podemos escrever

$$F(\zeta) = (c_1, c_2, c_3) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\zeta \left(\frac{1}{g} - g, \frac{i}{g} + ig, 2 \right) dh. \quad (1.44)$$

Podemos considerar $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$.

Estabeleceremos agora uma relação entre as superfícies mínimas e as funções analíticas f e g .

Consideremos o plano tangente que é gerado pelos vetores F_ξ e F_η , onde $F_\xi - iF_\eta = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Temos que

$$G = \lambda^2 \cdot Id, \quad (1.45)$$

assim

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2.$$

Além disso, tomando \tilde{N} um vetor tangente à superfície, obtemos

$$\tilde{N} \cdot F_\xi = \tilde{N} \cdot F_\eta = 0.$$

Logo

$$\tilde{N} \cdot (F_\xi - iF_\eta) = 0,$$

ou seja,

$$(N_1, N_2, N_3) \cdot (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0,$$

onde $\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3)$. Considerando $\varphi_1 = g^{-1} - g$, $\varphi_2 = i(g^{-1} + g)$ e $\varphi_3 = 2$, segue-se da última igualdade que

$$g^{-1}(N_1 + iN_2) - g(N_1 - iN_2) + 2N_3 = 0.$$

A escolha $N_1 = \operatorname{Re}\{g\}$ e $N_2 = \operatorname{Im}\{g\}$ é bem natural para deduzirmos \tilde{N} . Portanto $N_3 = \frac{|g|^2 - 1}{2}$ e considerando-se $N = \frac{\tilde{N}}{\|\tilde{N}\|}$ obtemos

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} (2 \operatorname{Re}\{g\}, 2 \operatorname{Im}\{g\}, |g|^2 - 1), \quad (1.46)$$

que é o normal unitário para superfície com orientação canônica. Agora dada uma superfície regular arbitrária $S = (F, M)$ orientada por uma carta local $\zeta = \xi + i\eta$ de M em \mathbb{R}^3 , definimos a *aplicação de Gauss* por

$$N(\xi, \eta) = \frac{F_\xi \times F_\eta}{\|F_\xi \times F_\eta\|}. \quad (1.47)$$

Vejamos que $N(\xi, \eta)$ definido em (1.47) é equivalente à N dada por (1.46). Temos que a superfície mínima, quando olhada muito próximo de um ponto, comporta-se como se fosse um plano, de modo que podemos considerar $g = a + ib$ constante. Tome $dh = dx + idy$. Logo usando (1.44) a superfície é dada por

$$\begin{aligned} \hat{F}(\zeta) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2} - a - ib, \frac{b + ia}{a^2 + b^2} - b + ia, 2 \right) (dx + idy) \\ &= (\alpha x - \beta y, \gamma x - \delta y, x), \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - a \right), \quad \beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2 + b^2} + b \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2 + b^2} - b \right) \text{ e } \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + a \right).$$

Os vetores tangentes à superfície são dados por

$$\hat{F}_x = (\alpha, \gamma, 1) \text{ e } \hat{F}_y = (-\beta, -\delta, 0),$$

e o vetor normal por

$$\hat{F}_x \times \hat{F}_y = (\delta, -\beta, -\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Temos que $(\delta, -\beta, -\alpha\delta + \beta\gamma)$ é equivalente a $(2a, 2b, a^2 + b^2 - 1)$, obtida a partir de (1.46), com o mesmo sentido, pois

$$\frac{4\delta}{2a} = -\frac{4\beta}{2b} = \frac{4(-\alpha\delta + \beta\gamma)}{a^2 + b^2 - 1} = \frac{a^2 + b^2 + 1}{a^2 + b^2} > 0.$$

Concluindo assim a equivalência afirmada.

Observamos que N leva pontos de M em S^2 .

Lema 1.18 *Se $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ define uma superfície mínima regular em parâmetros isotérmicos, então a aplicação de Gauss define uma aplicação analítica complexa de Ω na esfera de Riemann.*

Em geral a aplicação de Gauss não pode ser definida se a superfície não é regular. Entretanto, para uma superfície mínima generalizada a aplicação de Gauss estende-se continuamente, e analiticamente, para os pontos de ramificação, com N dado por (1.46). O comportamento de uma superfície mínima num ponto de ramificação pode ser ilustrado pela Figura 1.1. Para maiores detalhes, veja [7].

Teorema 1.19 *Seja S uma superfície mínima completa regular em \mathbb{R}^3 . Então ou S é um plano ou os vetores normais a S formam um subconjunto denso de S^2 .*

Para demonstrarmos este teorema precisaremos de dois resultados, os quais são:

Lema 1.20 *Seja S uma superfície mínima generalizada definida por $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então ou $F(\mathbb{C})$ pertence a um plano ou os vetores normais a S assumem todas as direções com no máximo duas exceções.*

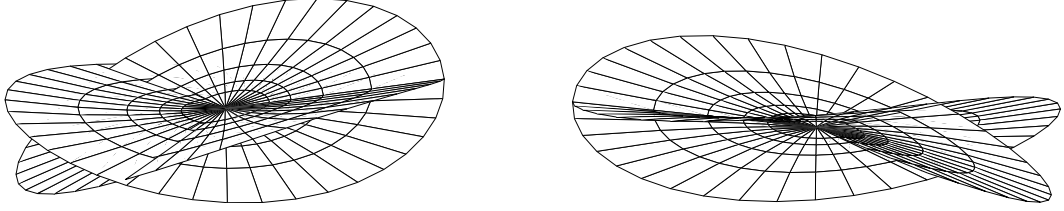


Figura 1.1: Ponto de ramificação visto por dois ângulos diferentes.

Lema 1.21 *Seja f uma função analítica no disco unitário $\Omega \subset \mathbb{C}$ que possui no máximo um número finito de zeros. Então existe um caminho divergente C em Ω tal que*

$$\int_C |f(z)| |dz| < \infty. \quad (1.48)$$

Demonstração do Teorema 1.19: Suponhamos que os vetores normais a S não têm imagem densa. Então existe um conjunto aberto na esfera unitária que não é interceptado pela imagem de S sob a aplicação de Gauss. Por uma rotação no espaço podemos assumir que o ponto $(0, 0, 1)$ está neste conjunto aberto. Seja N um normal arbitrário deste aberto, assim $N_3 \leq \iota < 1$, e o mesmo é verdade para a superfície de recobrimento universal \tilde{S} de S , que pode ser representada na forma $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é o plano ou o disco unitário. Por (1.46), $N_3 < \iota < 1$ se, e somente se $|g(\zeta)| \leq h < \infty$ e como \tilde{S} é regular, $f(\zeta)$ não pode se anular. Por (1.45) o comprimento de qualquer caminho C é

$$\int_C \lambda |d\zeta| = \frac{1}{2} \int_C |f|(1 + |g|^2) |d\zeta| \leq \frac{1 + h^2}{2} \int_C |f| |d\zeta|. \quad (1.49)$$

Se Ω fosse o disco, pelo Lema 1.21 existiria um caminho divergente C para o qual esta integral converge e a superfície não seria completa, contrariando a hipótese. Assim Ω é o plano inteiro e como os normais omitem mais que dois pontos, segue-se do Lema 1.20 que a imagem de \tilde{S} deve estar num plano. O mesmo é então verdade para S e como S é completa, deve ser todo o plano. ■

Este resultado leva à seguinte pergunta: dada uma superfície mínima completa S que não seja um plano, o que pode ser dito sobre o tamanho do conjunto de pontos na esfera omitida pela aplicação de Gauss de S ? O Teorema 1.19 diz ao menos que, se S é regular, o conjunto omitido não pode conter uma vizinhança de nenhum ponto. O próximo

teorema permite estabelecer S quando a quantidade de pontos omitidos é menor ou igual a 4, resultado este que se encontra em [1].

Teorema 1.22 *Seja E um conjunto arbitrário de k pontos na esfera unitária, $k \leq 4$. Então existe uma superfície mínima regular completa em \mathbb{R}^3 cuja imagem sobre a aplicação de Gauss omite precisamente o conjunto E .*

1.3.2 Curvaturas de Gauss e Total

O espaço normal em cada ponto da superfície em \mathbb{R}^3 é unidimensional, logo $B(N)$ é definido para um único vetor normal N , usualmente dado por (1.46). Da igualdade $F_\xi - iF_\eta = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ e da representação (1.42), obtemos

$$F_\xi - iF_\eta = \frac{fg}{2}(g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2). \quad (1.50)$$

Diferenciando (1.50) em relação a ξ temos

$$F_{\xi\xi} - iF_{\eta\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{fg}{2} \right) \cdot (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) + \frac{fg}{2} \cdot \left(\frac{\partial(g^{-1} - g)}{\partial\xi}, \frac{\partial(ig^{-1} + ig)}{\partial\xi}, 0 \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (F_{\xi\xi} - iF_{\eta\xi}) \cdot N &= \frac{fg}{|g|^2+1} \left[\operatorname{Re}\{g\} \frac{\partial(g^{-1}-g)}{\partial\xi} + i\operatorname{Im}\{g\} \frac{\partial(g^{-1}+g)}{\partial\xi} \right] \\ &= \frac{fg}{|g|^2+1} \left[\frac{\partial(g^{-1})}{\partial\xi} (\operatorname{Re}\{g\} + i\operatorname{Im}\{g\}) - \frac{\partial g}{\partial\xi} (\operatorname{Re}\{g\} - i\operatorname{Im}\{g\}) \right] \\ &= -\frac{fg}{|g|^2+1} \left[\frac{\partial g}{\partial\xi} \left(\frac{1}{g} + \bar{g} \right) \right] = -fg'. \end{aligned}$$

De modo análogo, diferenciando (1.50) em relação a η chegamos a

$$(F_{\xi\eta} - iF_{\eta\eta}) \cdot N = -ifg',$$

pois por Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial g}{\partial(\xi + i\eta)} = \frac{\partial \operatorname{Re}\{g\}}{\partial\xi} + i \frac{\partial \operatorname{Im}\{g\}}{\partial\xi} = \frac{\partial \operatorname{Im}\{g\}}{\partial\eta} - i \frac{\partial \operatorname{Re}\{g\}}{\partial\eta}.$$

Logo, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b_{11} & - & ib_{12} & = & -fg'; \\ b_{12} & - & ib_{22} & = & -ifg', \end{cases}$$

cujas soluções são $b_{11} = \operatorname{Re}\{-fg'\}$, $b_{12} = \operatorname{Im}\{fg'\}$ e $b_{22} = \operatorname{Re}\{fg'\}$, em que b_{ij} são os coeficientes de $B(N)$. Portanto, obtemos

$$[\xi' \ \eta'] \cdot B(N) \cdot \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = \operatorname{Re}\left\{-fg'\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (1.51)$$

De (1.45) temos

$$[\xi' \ \eta'] \cdot G \cdot \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2 \left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2,$$

e segue-se de (1.6) que a curvatura normal é dada por

$$k(N, T) = \left[\frac{2}{|f|(1+|g|^2)}\right]^2 \operatorname{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \left|\frac{d\zeta}{dt}\right| e^{i\alpha}.$$

Quando α percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, as curvaturas principais são

$$k_1 = \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}, \quad k_2 = \frac{-4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}. \quad (1.52)$$

Definição 1.23 *Dada uma superfície regular arbitrária de classe C^2 em \mathbb{R}^3 , a curvatura de Gauss K num ponto é o produto das curvaturas principais, ou seja,*

$$K = k_1 k_2. \quad (1.53)$$

Lema 1.24 *Seja S uma superfície mínima definida por $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então usando a representação (1.52), a curvatura de Gauss em cada ponto é dada por*

$$K = -\left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2.$$

Como consequência imediata temos

Corolário 1.25 *A curvatura de Gauss de uma superfície mínima é não-positiva e a menos que a superfície seja um plano, pode ter somente zeros isolados.*

Demonstração: Por (1.46) S é um plano se, e somente se N é constante, ou seja, se e somente se $g' = 0$. Mas g' é analítica, logo possui zeros isolados ou é identicamente nula. ■

Tomando Δ por um domínio cujo fecho está em Ω , a superfície definida pela restrição de F a Δ possui *curvatura total* dada por

$$\iint_{\Delta} K \, dA = \iint_{\Delta} K \lambda^2 \, d\xi \, d\eta = - \iint_{\Delta} \left[\frac{2|g'|}{1+|g|^2} \right]^2 \, d\xi \, d\eta, \quad (1.54)$$

que é a negativa da área da imagem de Δ sob a aplicação de Gauss. Se a imagem é multiplamente coberta, a área total é a área de todas as coberturas. Podemos notar que (1.54) pode ser considerada como a área esférica da imagem de Δ sobre g . A curvatura total de S é ainda a negativa da área da imagem na esfera unitária S^2 , veja [1].

Provaremos nesta seção três resultados importantes que envolvem superfícies mínimas e curvatura total. Mas antes precisaremos de alguns resultados, demonstrados em [1].

Teorema 1.26 *Seja M uma variedade bidimensional completa Riemanniana cuja curvatura de Gauss satisfaz*

$$K \leq 0, \quad (1.55)$$

$$\iint_M |K| \, dA < \infty. \quad (1.56)$$

Então existem uma variedade bidimensional compacta \tilde{M} , um número finito de pontos p_1, \dots, p_k em \tilde{M} e uma isometria entre M e $\tilde{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$.

Lema 1.27 *Sejam S uma superfície mínima regular completa definida por $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, Γ a projeção estereográfica dada em (1.34) e $N : M \rightarrow S^2$. Se a curvatura total de S é finita, então a conclusão do Teorema 1.26 é válida e a função g estende-se a uma função meromorfa em \tilde{M} , em que g é a composta $\Gamma \circ N : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.*

Teorema 1.28 *Seja S uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 . Então a curvatura total de S é igual a $-4\pi m$, $m \in \mathbb{N}$, ou $-\infty$.*

Lema 1.29 *Seja f analítica e diferente de zero para $0 < r_1 < |z| < \infty$. Suponha que para todo caminho C que diverge para infinito temos*

$$\int_C |f(z)| \, |dz| = \infty. \quad (1.57)$$

Então f tem no máximo um pólo no infinito (que pode ser de ordem maior ou igual a 1).

Observação 1.30 *O que o lema quer dizer é que f não pode ter singularidade essencial no infinito.*

Teorema 1.31 *Seja S uma superfície mínima regular completa em \mathbb{R}^3 com*

$$\iint_S K \, dA \geq -\infty.$$

Neste caso, pelos Lema 1.27 e pelo Teorema 1.26, temos um número k de pontos. Então

$$\iint_S K \, dA \leq 2\pi(\chi - k), \quad (1.58)$$

onde χ é a característica de Euler de S .

Demonstração: Se a integral $\iint_S K \, dA$ diverge para $-\infty$, o teorema já está provado. Caso contrário, S possui curvatura total finita e podemos aplicar o Teorema 1.26 e o Lema 1.27. Em virtude da definição de N , podemos assumir (depois de uma rotação no espaço) que $g(p) \neq 0$ e $g(p) \neq \infty$ nos pontos p_j e que os pólos de g são todos pólos simples. Numa vizinhança de qualquer ponto de $M = \tilde{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ temos a representação (1.42) em termos de parâmetros isotérmicos. Sob uma mudança conforme de parâmetros $\zeta(\tilde{\zeta})$, as correspondentes funções $\tilde{\phi}_k(\tilde{\zeta})$ satisfazem $\tilde{\phi}_k(\tilde{\zeta}) = \phi_k(\zeta) \frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}}$ e similarmente para $f(\zeta)$. Isto implica que a existência de um zero de ϕ_k ou f num ponto, bem como sua ordem, é independente da escolha de parâmetros locais. Pelo Lema 1.17, como S é regular, f deve ter zero de ordem 2 em cada ponto que é pólo simples de g , e f não deve possuir outros zeros. Assim, se g é de ordem m em \tilde{M} , f possui exatamente $2m$ zeros em M . Em cada ponto p_j podemos introduzir coordenadas locais ζ tais que $\zeta = 0$ corresponde a p_j . Para $0 < |\zeta| < \varepsilon$ temos $|g| < m$, assim $f \neq 0$. Além disso, se C é uma curva em M que tende a p_j , como S é completa obtemos

$$\infty = \int_C \lambda |d\zeta| = \frac{1}{2} \int_C |f|(1 + |g|^2) |d\zeta| \leq \frac{1 + m^2}{2} \int_C |f| |d\zeta|. \quad (1.59)$$

Segue-se do Lema 1.29 que f deve possuir um pólo na origem. Como as funções $F^k(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\zeta \phi(z) \, dz \right\} + c_k$ são univalentes em $0 < |\zeta| < \varepsilon$ e $g(p_j) \neq 0$, segue-se facilmente que a ordem ν_j dos pólos de f em p_j é ao menos igual a dois. Assim $\frac{\phi_3}{g}$ é uma diferencial meromorfa em \tilde{M} e seu número de pólos menos seu número de zeros é igual a $2 - 2\mathcal{G}$, onde \mathcal{G} é o gênero de \tilde{M} , ver [2]. Além disso, a característica de Euler χ em M é igual a $2 - 2\mathcal{G} - k$. Temos portanto

$$2 - 2\mathcal{G} = \left(\sum_{j=1}^k \nu_j \right) - 2m \geq 2k - 2m, \quad (1.60)$$

e assim

$$\iint_S K dA = -4\pi m \leq 2\pi(2 - 2\mathcal{G} - 2k) = 2\pi(\chi - k).$$

■

Teorema 1.32 *Há somente duas superfícies mínimas completas cuja curvatura total é -4π . A saber, o catenóide e a superfície de Enneper.*

Demonstração: Este é o caso $m = 1$ no Teorema 1.28. Isto significa que a função g é meromorfa de ordem 1, assim aplica \tilde{M} conformemente sobre S^2 . Logo, \tilde{M} possui gênero $\mathcal{G} = 0$ e a desigualdade (1.60) reduz-se a $k \leq 2$. Portanto M é conforme a S^2 menos um ou dois pontos. Em qualquer caso temos $g(\zeta) = \zeta$, e pelo Lema 1.29, que aplica-se por causa de (1.59), $f(\zeta)$ é uma função racional. Como S é completa e as funções $F^k(\zeta)$ são univalentes, deduzimos que a única escolha de f compatível com essas condições produzem as duas superfícies mencionadas. De fato, f deve ser da forma

$$f(\zeta) = \frac{a_n \zeta^n + \cdots + a_1 \zeta + a_0}{(z - c)^m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

cujos domínio é $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{c\}$. Como o número de zeros de f é igual ao número de pólos de g , então

$$f(\zeta) = \frac{a_0}{(z - c)^m}, \quad a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Vejamos qual superfície obtemos para cada valor de m .

Quando $m = 0$ temos

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \operatorname{Re} \int \frac{a_0 \zeta}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta, \frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \right) d\zeta \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{a_0}{2} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}, i\zeta + i\frac{\zeta^3}{3}, \zeta^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Porém como $a_0 \in \mathbb{C}$, podemos escrever $a_0 = |a_0|e^{i\theta}$, assim

$$F(\zeta) = \frac{|a_0|}{2} \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}, i\zeta + i\frac{\zeta^3}{3}, \zeta^2 \right) \right].$$

Vamos fazer uma rotação de $\frac{\theta}{2}$ em \mathbb{R}^3 , em torno do eixo vertical. Para realizarmos isto, façamos o seguinte produto:

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}, i\zeta + i\frac{\zeta^3}{3}, \zeta^2 \right) \right] \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a primeira coordenada da superfície é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{|a_0|}{2} \left\{ \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) \right] \cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(i\zeta + \frac{i\zeta^3}{3} \right) \right] \left(-\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \\ & \frac{|a_0|}{2} \left[\operatorname{Re} (e^{i\theta} \zeta) \operatorname{Re} \{e^{-i\frac{\theta}{2}}\} - \operatorname{Im} (e^{i\theta} \zeta) \operatorname{Im} \{e^{-i\frac{\theta}{2}}\} - \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{\zeta^3}{3} \right) \operatorname{Re} \{e^{i\frac{\theta}{2}}\} + \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} \frac{\zeta^3}{3} \right) \operatorname{Im} \{e^{i\frac{\theta}{2}}\} \right] \\ & = \frac{|a_0|}{2} \left[\operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \zeta e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) - \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{\zeta^3}{3} e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Chamando $\eta = e^{i\frac{\theta}{2}} \zeta$, obteremos que a primeira coordenada é dada por

$$\frac{|a_0|}{2} \operatorname{Re} \left(\eta - \frac{\eta^3}{3} \right).$$

Fazendo $\eta = u + iv$ obtemos que a primeira coordenada é

$$\frac{|a_0|}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right).$$

Repetindo o procedimento para as outras duas coordenadas temos que a superfície é dada por

$$F(\eta(\zeta)) = \frac{|a_0|}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right),$$

que é a superfície de Enneper.

Quando $m = 1$ e $c \neq 0$ temos que

$$F(\zeta) = \operatorname{Re} \int \frac{a_0}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta, \frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \right) \frac{\zeta}{\zeta - c} d\zeta.$$

Porém, a integral de linha em torno de c é nula, ou seja,

$$\operatorname{Re} \oint \frac{a_0}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta, \frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \right) \frac{\zeta}{\zeta - c} d\zeta = 0.$$

Assim,

$$\operatorname{Re} \oint \frac{a_0}{2} \left(\frac{1}{\zeta - c} - \frac{\zeta^2}{\zeta - c}, \frac{i}{\zeta - c} + \frac{i\zeta^2}{\zeta - c}, \frac{2\zeta}{\zeta - c} \right) d\zeta = 0,$$

logo

$$\operatorname{Re} \oint \frac{a_0}{2} \left(\frac{1}{\zeta - c} - (\zeta + c) - \frac{c^2}{\zeta - c}, \frac{i}{\zeta - c} + i(\zeta + c) + \frac{ic^2}{\zeta - c}, 2 + \frac{2c}{\zeta - c} \right) d\zeta = 0.$$

E portanto

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_0}{2} (2\pi i(1 - c^2), 2\pi i(i + ic^2), 4c\pi i) \right] = 0.$$

Da terceira coordenada temos que $a_0 c$ é real. Da segunda, concluímos que $a_0(1 + c^2)$ é imaginário puro. Assim, $\frac{a_0(1+c^2)}{a_0 c}$ é imaginário puro. Logo, $c^{-1} + c$ é imaginário puro, implicando que c e a_0 são imaginários puros. Da primeira coordenada temos que $a_0(1 - c^2)$ é real, e como $a_0 \neq 0$ concluímos que $c = \pm 1$, contradizendo o fato de que $c \in i\mathbb{R}$. Portanto não podemos ter $m = 1$ e $c \neq 0$. Porém fazendo a mesma análise com $c = 0$ chegaremos a $a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_0 \in i\mathbb{R}$. Como $a_0 \neq 0$ temos também uma contradição. Logo, m não pode ser igual a 1.

Contradições semelhantes também são obtidas para os casos: $m = 2$ com $c \neq 0$, e $m = 3$. Vamos estudar o caso $m = 2$ e $c = 0$, no qual obteremos o catenóide. A superfície, neste caso, é dada por

$$F(\zeta) = \operatorname{Re} \int \frac{a_0}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta, \frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \right) \frac{1}{\zeta} d\zeta = \operatorname{Re} \left[\frac{a_0}{2} \left(-\frac{1}{\zeta} - \zeta, -\frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \ln \zeta \right) \right].$$

Temos da terceira coordenada que $\operatorname{Re} \oint \frac{a_0}{\zeta} d\zeta = 0$, logo concluímos que $\operatorname{Re}\{a_0 2\pi i\} = 0$. Portanto, a_0 é real. Assim, fazendo $\zeta = e^{-w}$, $w = u + iv$, teremos

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_0}{2} \left(-\frac{1}{\zeta} - \zeta, -\frac{i}{\zeta} + i\zeta, 2 \ln \zeta \right) \right] = a_0 \operatorname{Re} (-\cosh w, i \sinh w, -2w).$$

Lembrando que

$$\cosh(u + iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v$$

e

$$\sinh(u + iv) = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v.$$

Temos que a superfície S é dada por

$$a_0(-\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, -2u),$$

que é um catenóide.

Quando $m = 4$ temos

$$\int_{t_0}^{\infty} |f|(1 + |g|^2) dA < \infty.$$

e quando $m > 4$

$$\int_0^{\infty} |f|(1 + |g|^2) dA = 0.$$

visto que a ordem de $|f|$ é maior que a ordem de $|g|^2$, e portanto, nestes dois casos, a superfície deixa de ser completa. ■

Corolário 1.33 *A superfície de Enneper e o catenóide são as únicas duas superfícies mínimas regulares completas cuja aplicação de Gauss é injetora.*

Demonstração: Se a aplicação de Gauss é injetora, então a curvatura total é a negativa da área da sua imagem e portanto satisfaz

$$-4\pi \leq \iint_S K \, dA < 0.$$

Pelo Teorema 1.28, devemos ter $-4\pi = \iint_S K \, dA$, e pelo Teorema 1.32 concluímos a demonstração. ■

Capítulo 2

Superfícies mínimas folheadas por circunferências

Neste capítulo estudaremos os argumentos que Riemann utilizou em 1867 para determinar as superfícies mínimas cujas bordas são circunferências contidas em planos paralelos, e com a hipótese de que cada plano compreendido entre os dois primeiros, e paralelos a eles, intercepta a superfície em circunferências.

As soluções por ele obtidas foram o catenóide e os exemplos conhecidos hoje como as superfícies de Riemann. Em 1869, Enneper demonstrou que não existem superfícies mínimas folheadas por circunferências em planos não-paralelos, e em 1956 Shiffman obteve a solução mais geral do problema, eliminando a hipótese de que as superfícies estão folheadas por circunferências [6]. Porém, neste trabalho, a demonstração que faremos não é a de Shiffman, e sim do seguinte resultado: *Seja um anel mínimo mergulhado em \mathbb{R}^3 , tal que sua função g coincide com a função \wp de Weierstrass do toro retangular. Então este anel está contido em alguma das superfícies mínimas de Riemann.* A demonstração de Shiffman pode ser encontrada em [10].

2.1 Considerações teóricas

Vimos que para as superfícies em \mathbb{R}^3 na forma não-paramétrica a condição de minimalidade pode ser expressa pela equação

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2(f_x \cdot f_y)f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (2.1)$$

Uma superfície é mínima se sua curvatura média é nula, ou equivalentemente,

$$eG - 2fF + Eg = 0,$$

em que E , F e G , e e , f e g são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente.

Riemann expressou as condições de minimalidade de uma superfície M , definida pelos zeros da função diferenciável $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{O} aberto em \mathbb{R}^3 , como

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = 0, \quad (2.2)$$

em que div representa o divergente e ∇ o gradiente em \mathbb{R}^3 [6]. Note que ∇F é um campo vetorial e $\frac{1}{\|\nabla F\|}$ é um campo escalar. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) &= \frac{1}{\|\nabla F\|} \cdot \operatorname{div}(\nabla F) + \nabla \left(\frac{1}{\|\nabla F\|} \right) \cdot \nabla F \\ &= \frac{1}{\|\nabla F\|} \cdot \Delta F - \frac{1}{\|\nabla F\|^2} \left[\|\nabla F\|_x \quad \|\nabla F\|_y \quad \|\nabla F\|_z \right] \cdot \nabla F \\ &= \frac{1}{\|\nabla F\|} \left(\Delta F - \frac{1}{\|\nabla F\|} d\|\nabla F\|(\nabla F) \right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla F\|} \left(\Delta F - \frac{1}{\|\nabla F\|} (\nabla F)(\|\nabla F\|) \right), \end{aligned}$$

onde Δ é o operador Laplaciano e $\|\nabla F\|_i$ denota a derivada de $\|\nabla F\|$ em relação a variável i . Pelo Lema a seguir, a condição de minimalidade (2.2) ficará provada.

Lema 2.1 *Seja $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $M \subseteq F^{-1}(\{0\})$ uma superfície regular. Então M é mínima se, e somente se $(\nabla F)(\|\nabla F\|) = \|\nabla F\|\Delta F$ em M .*

Demonstração: Recordemos que o espaço tangente a M em p é $T_p M = \operatorname{Ker}(dF_p) = \{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, (\nabla F)_p \rangle = 0\}$. Assim, $(\nabla F)|_M$ é um campo normal sobre M e $N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}|_M$ um campo normal unitário. Por definição de Laplaciano

$$\Delta F = \operatorname{tr}(\nabla^2 F) = \sum_{i=1}^2 (\nabla^2 F)(E_i, E_i) + (\nabla^2 F)(N, N), \quad (2.3)$$

onde $\nabla^2 F$ é a hessiana de F e $\{E_1, E_2\}$ é uma base local ortonormal do campo tangente à M . Iremos deduzir uma expressão para ΔF que envolverá a curvatura média. Pela definição da hessiana,

$$(\nabla^2 F)(E_i, E_i) = \langle d(\nabla F)(E_i), E_i \rangle.$$

Como $(\nabla F)(\|\nabla F\|) = d(\|\nabla F\|)(\nabla F)$, então $d(\nabla F)(E_i) = E_i(\nabla F)$. Observando que $N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$, obtemos

$$(\nabla^2 F)(E_i, E_i) = \langle E_i(\nabla F), E_i \rangle = \langle E_i(\|\nabla F\|N), E_i \rangle.$$

Resolvendo a última expressão acima pela regra do produto, chegamos a

$$(\nabla^2 F)(E_i, E_i) = E_i(\|\nabla F\|)\langle N, E_i \rangle + \|\nabla F\|\langle dN(E_i), E_i \rangle.$$

Como N e E_i são ortogonais, $\langle N, E_i \rangle = 0$. Logo

$$(\nabla^2 F)(E_i, E_i) = \|\nabla F\|\langle dN(E_i), E_i \rangle,$$

e assim

$$\sum_{i=1}^2 (\nabla^2 F)(E_i, E_i) = \|\nabla F\| \operatorname{tr}(dN) = 2\|\nabla F\|H. \quad (2.4)$$

Por outro lado,

$$(\nabla^2 F)(N, N) = \|\nabla F\|^{-2}(\nabla^2 F)(\nabla F, \nabla F).$$

Esta última igualdade pode ser escrito ainda como

$$(\nabla^2 F)(N, N) = \|\nabla F\|^{-1}(\nabla F)(\|\nabla F\|). \quad (2.5)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|\nabla F\|^{-2}(\nabla^2 F)(\nabla F, \nabla F) &= \|\nabla F\|^{-2} \cdot \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ &= \|\nabla F\|^{-1} [\|\nabla F\|_x \quad \|\nabla F\|_y \quad \|\nabla F\|_z] \cdot \nabla F \\ &= \|\nabla F\|^{-1} d\|\nabla F\|(\nabla F) = \|\nabla F\|^{-1}(\nabla F)(\|\nabla F\|). \end{aligned}$$

Logo, substituindo as expressões (2.4) e (2.5) em (2.3), chegamos a

$$\|\nabla F\|\Delta F = 2\|\nabla F\|^2 H + (\nabla F)(\|\nabla F\|).$$

Portanto, se M é uma superfície mínima, então $\|\nabla F\|\Delta F = (\nabla F)(\|\nabla F\|)$. Reciprocamente, se $\|\nabla F\|\Delta F = (\nabla F)(\|\nabla F\|)$, então $2\|\nabla F\|^2 H = 0$. Como $\|\nabla F\| \neq 0$, concluímos que $H = 0$, ou seja, M é mínima. ■

Para nosso propósito, precisamos definir quando uma superfície é folheada por circunferências.

Definição 2.2 *Uma superfície $M \subseteq F^{-1}(\{0\})$ está folheada por circunferências se, localmente, pode ser parametrizada na forma*

$$X(u, v) = c(u) + r(u) (\cos(v)v_1(u) + \sin(v)v_2(u)), \quad u_0 \leq u \leq u_1 \text{ e } 0 \leq v \leq 2\pi, \quad (2.6)$$

onde $c(u)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 que parametriza o centro de cada circunferência, $r(u)$ é uma função positiva que mede seu raio e $v_1(u)$, $v_2(u)$ são funções vetoriais, ortogonais e unitárias. Além disso, as aplicações são de classe C^m , $m \geq 2$.

O próximo resultado mostra a afirmação de Enneper, citada no início deste capítulo.

Teorema 2.3 (Enneper) *Se uma superfície mínima $M \subseteq F^{-1}(\{0\})$ está folheada por circunferências, então estas estão contidas em planos paralelos.*

Demonstração: Sejam u o parâmetro de folheação, $\{C_u \mid u \in (u_0, u_1)\}$ a família de circunferências que folheam a superfície e $t(u)$ o vetor normal unitário ao plano que contém C_u . Se mostrarmos que $t(u)$ é constante, o teorema fica provado. Suponha por absurdo que t é não-constante. Assim, tomando um intervalo eventualmente menor podemos assumir que o vetor derivada $t'(u) \neq 0$, para qualquer $u \in (u_0, u_1)$. Chamemos

$$\gamma : (u_0, u_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma'(u) = t(u)$, $\forall u \in (u_0, u_1)$. Sejam $n(u)$ e $b(u)$ os vetores normais e binormais unitários, respectivamente, e as equações de Frenet

$$t' = \kappa n, \quad n' = -\kappa t - \tau b \quad \text{e} \quad b' = \tau n.$$

Podemos escrever localmente M como em (2.6), tomando $v_1 = n$ e $v_2 = b$. Escrevemos o vetor c' como $c' = \alpha t + \beta n + \delta b$, para funções α , β e δ que dependem somente de u . Deste modo, a condição $eG - 2fF + Eg = 0$ é dada por

$$\frac{1}{\|X_u \wedge X_v\|} [a_1 \cos 3v + a_2 \sin 3v + a_3 \cos 2v + a_4 \sin 2v + a_5 \cos v + a_6 \sin v + a_7] = 0,$$

onde $a_1 = -\frac{1}{2}r^3\kappa(\beta^2 - \delta^2 + r^2\kappa^2)$,

$a_2 = -r^3\beta\delta\kappa$,

$a_3 = \frac{r^3}{2}(-6\beta\kappa r' + r(5\alpha\kappa^2 + \kappa\beta' - \beta\kappa'))$,

$a_4 = \frac{r^3}{2}(r\kappa\delta' - \delta(6\kappa r' + r\kappa'))$,

$a_5 = -\frac{r^2}{2}\{3r^3\kappa^3 - 4\alpha\beta r' + r[8\alpha^2\kappa + 3\beta^2\kappa + 3\kappa(\delta^2 + 2r'^2) - 2\beta\alpha' + 2\alpha(\delta\tau + \beta')] + 2r^2(r'\kappa' - \kappa r'')\}$,

$a_6 = r^2\{2\alpha\delta r' + r^2\kappa\tau r' + r[\delta\alpha' + \alpha(\beta\tau - \delta')]\}$,

$a_7 = \frac{r^2}{2}\{2\alpha^3 + r[2r'(-2\beta\kappa + \alpha') + r(\kappa(2\delta\tau + \beta') - \beta\kappa')] + \alpha(2\beta^2 + 2\delta^2 + 5r^2\kappa^2 + 2r'^2 - 2rr'')\}$.¹

Visto que as funções $\{\cos(nv), \sin((n+1)v) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ são linearmente independentes, temos que $a_i = 0$, $i = 1, \dots, 7$. Sabemos que $r > 0$ e $\kappa > 0$, assim da condição $a_2 = 0$ deduzimos que $\beta = 0$, pois se $\delta = 0$ e $\beta \neq 0$ teríamos de $a_1 = 0$ que $\beta^2 = -r^2\kappa^2$, o que é um absurdo. Logo, substituindo $\beta = 0$ em $a_1 = 0$ chegamos a $\delta^2 = r^2\kappa^2$. Assim, $a_4 = 0$ toma a forma $r'(-5r\kappa^2) = 0$, logo $r' = 0$. De $a_3 = 0$ concluímos que $\alpha = 0$. Substituindo tudo isto em $a_5 = 0$ chegamos a $r^5\kappa^3 = 0$, o que implica $r = 0$ ou $\kappa = 0$. Esta conclusão contradiz a hipótese. Portanto, t deve ser constante e o teorema está provado. ■

2.1.1 O Princípio da Reflexão de Schwarz para Superfícies Mínimas

Na década de 1860-1870, Enneper e Weierstrass obtiveram fórmulas de representação de superfícies mínimas, como consta no Lema 1.17. Sua origem está na fórmula

$$\Delta X = 2HN,$$

onde X é uma imersão mínima da superfície S no espaço Euclidiano tridimensional, $X = (x_1, x_2, x_3) : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, N sua aplicação de Gauss e H sua curvatura média. Sendo X mínima temos que cada função coordenada x_i , $i = 1, 2, 3$, é harmônica, e a cada uma delas está associada uma função harmônica conjugada x_i^* , $i = 1, 2, 3$, tal que $\nabla x_i^* = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\nabla x_i)$ e a imersão mínima "conjugada" é dada por $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, ver [5]. O operador $\text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}$ atua no campo vetorial e rotaciona cada $T_p S$ por um ângulo $\frac{\pi}{2}$ na direção positiva. A relação $dX^* = -dX \circ \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}$ mostra que X e X^* são localmente imersões e que $\Psi = X + iX^*$ satisfaz $d\Psi \circ \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}} = id\Psi$. Em particular, Ψ é holomorfa e

$$X = \text{Re}\Psi = \text{Re} \int d\Psi = \text{Re} \int (dX + idX^*).$$

¹A verificação destas fórmulas pode ser feita no software Mathematica utilizando o arquivo foliacion-circ.nb. que está disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~valerio/software.html>.

Considere Γ a projeção estereográfica, definida em (1.34), do pólo norte ao plano complexo, o qual podemos tomar como o plano x_1x_2 . Temos que

$$g = \Gamma \circ N : S \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

é conforme quando $DN \neq 0$. Assim, g é uma função meromorfa em S . Defina $dh = dx_3 - idx_3 \circ Rot_{\frac{\pi}{2}}$. Podemos agora enunciar o seguinte lema, [5]:

Lema 2.4 *Nas condições acima, se c é uma curva em $X(S)$, então c é*

$$\begin{aligned} &\textit{assintótica} \text{ se, e somente se } \frac{dg}{g}(c')dh(c') \in i\mathbb{R}, \\ &\textit{principal} \text{ se, e somente se } \frac{dg}{g}(c')dh(c') \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Demonstração: Temos do Capítulo 1 que o operador de Weingarten é dado por

$$\mathcal{S}_{2 \times 2} = G_{2 \times 2}^{-1} \cdot DX_{2 \times 3}^t \cdot DN_{3 \times 2}.$$

A superfície X é dada por

$$X(u, v) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) dh.$$

Logo

$$X_u - iX_v = \frac{1}{2} (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) h'.$$

Observando que $X_u - iX_v$ é analítica, temos $X_{uu} = -X_{vv}$. Portanto

$$\frac{\partial}{\partial z}(X_u - iX_v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (X_u - iX_v) = \frac{1}{2} (X_{uu} - iX_{uv} - iX_{uv} - X_{vv}) = X_{uu} - iX_{uv}.$$

Por outro lado,

$$X_{uu} - iX_{uv} = \frac{\partial}{\partial z}(X_u - iX_v) = \frac{1}{2} (-g^{-2} - 1, -ig^{-2} + i, 0) g' h' + \frac{1}{2} (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) h''.$$

Observe que

$$\frac{1}{2} (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) h'' = \frac{h''}{h'} (X_u - iX_v).$$

Além disso,

$$(g^{-2} + 1, ig^{-2} - i, 0) g' h' = (g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) \frac{g' h'}{g} + \left(2, -2i, -\frac{2}{g} \right) g' h',$$

mas

$$(g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2) \frac{g'h'}{g} = \frac{g'}{g} (X_u - iX_v).$$

Como X_u e X_v são ortogonais a N , obtemos

$$\begin{aligned} \langle X_{uu} - iX_{uv}, N \rangle &= -\frac{1}{2} \left\langle \left(2, -2i, -\frac{2}{g} \right) g'h', \frac{1}{|g|^2 + 1} (2\operatorname{Re}\{g\}, 2\operatorname{Im}\{g\}, |g|^2 - 1) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|g|^2 + 1} \left[2g'h'\operatorname{Re}\{g\} - 2ig'h'\operatorname{Im}\{g\} - \frac{g'h'}{g} (|g|^2 - 1) \right] \\ &= -\frac{1}{|g|^2 + 1} [g'h' \cdot |g|^2 + g'h'] \cdot \frac{1}{g} = -\frac{g'h'}{g}. \end{aligned}$$

Denote

$$\widehat{S} = -B(N) = DX^t \cdot DN = - \begin{bmatrix} X_{uu} & X_{uv} \\ X_{uv} & X_{vv} \end{bmatrix} \cdot N = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\left(\frac{g'h'}{g}\right) & -\operatorname{Im}\left(\frac{g'h'}{g}\right) \\ -\operatorname{Im}\left(\frac{g'h'}{g}\right) & -\operatorname{Re}\left(\frac{g'h'}{g}\right) \end{bmatrix}.$$

Como $G = \lambda^2 Id$, onde $\lambda = \frac{1}{2}|h'|(|g|^{-1} + |g|)$, temos que $\mathcal{S} = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{S}$.

Observe que

$$\langle DX(U), DN(V) \rangle = U^t DX^t DN V = U^t \widehat{S} V = \langle \widehat{S}(U), V \rangle.$$

Mas

$$\begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \widehat{S} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \operatorname{Re}\left(\frac{g'h'}{g}\right) (du^2 - dv^2) - 2\operatorname{Im}\left(\frac{g'h'}{g}\right) du dv,$$

e como

$$dz^2 = (du + idv)(du + idv) = (du^2 - dv^2 + 2i du dv),$$

temos

$$\operatorname{Re}\left(\frac{g'dz h'dz}{g}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{g'h'}{g} (du^2 - dv^2 + 2i du dv)\right) = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \widehat{S} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \operatorname{Re}\left(\frac{dg dh}{g}\right).$$

A curva c é assintótica se sua curvatura normal se anula, isto é, se, e somente se $\frac{dg}{g} dh|_{c'} \in i\mathbb{R}$. Por outro lado, c é principal se c' é direção principal da superfície S , isto é, c' é auto-vetor de \mathcal{S} . Neste caso \widehat{S} é matriz diagonal na base $\{c', \operatorname{Rot}_{\frac{\pi}{2}} c'\}$, e portanto $\operatorname{Im}\left(\frac{dg}{g} dh\right) = 0$. ■

Uma curva em qualquer superfície S em \mathbb{R}^3 é uma linha reta se, e somente se sua curvatura geodésica e sua curvatura normal anulam-se. Uma curva principal em S que

não é uma linha reta possui a propriedade de ser geodésica se, e somente se pertence a um plano ortogonal à superfície. De fato, seja N' normal à superfície, tal que $N' = \lambda\alpha'$, $\lambda = \lambda(t)$. Se α é também geodésica, então $\alpha'' = \beta N$, mas como $\alpha'' \neq 0$ (pois α não é reta), então $N = b\alpha''$, $b = \frac{1}{\beta}$. Logo $\lambda\alpha' = N' = b'\alpha'' + b\alpha'''$, assim α' , α'' e α''' são linearmente dependentes, o que implica torção nula. Deste modo α é plana, e como é geodésica, o plano é ortogonal à superfície. Reciprocamente, se α está contida no plano ortogonal à superfície, então N pertence ao plano, com $\langle N, \alpha' \rangle = 0$, $\langle N', \alpha' \rangle = \lambda \neq 0$ (pois α não é reta) e $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$, $\alpha' \neq 0$ (pois α não é reta e está parametrizada pelo comprimento de arco). Ou seja, $\alpha'' = \beta N$, portanto α é geodésica.

Assim podemos usar (2.7) em geodésicas para identificar retas e curvas principais. De (2.7) vemos que geodésicas principais correspondem a retas de X^* , e vice-versa, onde X^* é a conjugada de X . O vetor normal à superfície ao longo de uma geodésica principal é paralelo ao plano da curva, e o mesmo vetor ao longo da reta conjugada é ortogonal à reta. O princípio de reflexão de Schwarz para superfícies mínimas afirma que estas são invariantes por reflexão no plano da curva e rotação de 180° pela reta, ver [5].

Teorema 2.5 *Toda linha reta (respectivamente, geodésica plana) numa superfície mínima é uma linha de simetria rotacional (respectivamente, simetria especular) da superfície.*

Demonstração: Achar uma geodésica numa superfície mínima satisfazendo uma das condições do Lema 2.4 é equivalente a achar uma reta ou uma geodésica plana.

Suponha que uma superfície mínima S contém um segmento de reta L . Sem perda de generalidade podemos assumir que L é uma parte de eixo x_3 contendo a origem. A superfície conjugada S^* de S possui uma geodésica plana horizontal. Como as funções coordenadas de S são harmônicas, $z := x_3 + ix_3^*$ define um parâmetro conforme numa vizinhança de L . Escrevemos $z = u_1 + iu_2$ e transladamos S de modo que $(x_1, x_2, x_3)(0) = \vec{0}$. Então

$$x_3(u_1) = u_1, \quad x_3^*(u_1) = 0 \quad \text{e} \quad x_1(u_1) = x_2(u_1) = 0.$$

Assim $x_3 + ix_3^*$ aplica um segmento de reta do eixo real no eixo real, enquanto $x_1 + ix_1^*$ e $x_2 + ix_2^*$ aplicam este mesmo segmento no eixo imaginário. O Princípio de Reflexão de Schwarz para funções analíticas complexas afirma que, se uma função analítica f definida numa vizinhança de um segmento do eixo real aplica este segmento numa linha $l \subset \mathbb{C}$, então $f(\bar{z}) = \rho \circ f(z)$, onde ρ é reflexão em l . Além disso, se f é definida numa vizinhança de um

lado do segmento real, a extensão de f por $f(\bar{z}) := \rho \circ f(z)$ é analítica numa vizinhança deste segmento.

Uma vez que a reflexão no eixo real é $z \rightarrow \bar{z}$ (respectivamente $z \rightarrow -\bar{z}$ no eixo imaginário), podemos concluir que

$$(x_3 + ix_3^*)(\bar{z}) = \overline{x_3 + ix_3^*}$$

por definição, e

$$(x_k + ix_k^*)(\bar{z}) = -\overline{(x_k + ix_k^*)}, \quad k = 1, 2.$$

Assim,

$$X(\bar{z}) := (x_1, x_2, x_3)(\bar{z}) = (-x_1, -x_2, x_3)(z),$$

$$X^*(\bar{z}) := (x_1^*, x_2^*, x_3^*)(\bar{z}) = (x_1^*, x_2^*, -x_3^*)(z).$$

Isto é, S é simétrica por rotação em torno do eixo x_3 e S^* é simétrica por reflexão no plano x_1x_2 , como havíamos afirmado. ■

2.1.2 O problema de Björling

Consideremos uma faixa real e analítica \mathcal{F} definida por

$$\mathcal{F} = \{(c(t), n(t)) : t \in I \subset \mathbb{R}\},$$

constituída de uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ real e analítica com $c'(t) \neq 0$, ou ao menos $c'(t) \neq 0$ em alguns pontos isolados t pertencendo ao intervalo aberto I , e um campo vetorial $n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ real e analítico ao longo de c , com $\|n(t)\| \equiv 1$ e $\langle c'(t), n(t) \rangle \equiv 0$.

O problema de Björling consiste em achar uma superfície mínima definida por $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $I \subset \Omega$, Ω simplesmente conexo, tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) $X(u, 0) = c(u)$, para todo $u \in I$,
- (ii) $N(u, 0) = n(u)$, para todo $u \in I$.

Sendo $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ o normal de X [?].

Teorema 2.6 *Para qualquer faixa real analítica $\mathcal{F} = \{(c(t), n(t)) : t \in I \subset \mathbb{R}\}$ o problema de Björling tem exatamente uma solução $X(u, v)$ dada por*

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w) \right\}, \quad (2.8)$$

$w = u + iv \in \Omega$, $u_0 \in \Omega$, e Ω é um domínio simplesmente conexo com $I \subset \Omega$ no qual as séries de potência de c e n convergem.

Observação 2.7 A unicidade é entendida do seguinte modo: Se $\tilde{X}(u, v) \in \tilde{\Omega}$ é outra solução, então $X(u, v) = \tilde{X}(u, v)$ para $u + iv \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$.

Demonstração: Suponha que o problema de Björling tenha uma solução $X(u, v)$, definida no domínio simplesmente conexo Ω , e seja $X^*(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sua superfície conjugada com $X^*(u_0, 0) = 0$, $u_0 \in I$. Então

$$f(w) = X(u, v) + iX^*(u, v), \quad w = u + iv \in \Omega,$$

é uma curva isotrópica com $X = \operatorname{Re} f$ e

$$f' = X_u + iX_u^* = X_u - iX_v.$$

Uma vez que $X_v = N \wedge X_u$, segue-se que

$$f' = X_u - iN \wedge X_u.$$

Assim

$$f'(u) = c'(u) - in(u) \wedge c'(u),$$

e portanto

$$f(u) = c(u) - i \int_{u_0}^u n(t) \wedge dc(t), \quad \text{qualquer } u \in I.$$

Isto implica

$$f(w) = c(w) - i \int_{u_0}^w n(w) \wedge dc(w), \quad \text{para todo } w \in \Omega, \quad (2.9)$$

pois ambos os lados são funções holomorfas de w . Deste modo, X deve ser da forma (2.8), que produz a unicidade. Agora devemos provar que (2.8) é de fato a solução do problema de Björling. Para isto, consideremos a curva holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por (2.9). Para $w \in I$, temos

$$\operatorname{Re} f'(w) = c'(w), \quad \operatorname{Im} f'(w) = -n(w) \wedge c'(w).$$

Uma vez que os vetores $c'(w)$ e $c'(w) \wedge n(w)$ são ortogonais e têm o mesmo comprimento, inferimos que

$$\langle f'(w), f'(w) \rangle = 0, \quad \text{para todo } w \in I,$$

e portanto

$$\langle f'(w), f'(w) \rangle = 0, \text{ para qualquer } w \in \Omega.$$

Assim, $X(u, v) = \operatorname{Re} f(w)$, $w = u + iv \in \Omega$, é uma superfície mínima. Desde modo, $c(w)$, $n(w)$ e $c'(w)$ são reais para $w \in I$, e deduzimos que

$$X(u, 0) = \operatorname{Re} f(u) = c(u), \text{ para qualquer } u \in I, \quad (2.10)$$

e

$$X_u(u, 0) - iX_v(u, 0) = f'(u) = c'(u) - in(u) \wedge c'(u), \quad u \in I.$$

Assim,

$$X_u(u, 0) = c'(u) \quad \text{e} \quad X_v(u, 0) = n(u) \wedge c'(u). \quad (2.11)$$

Além disso temos

$$X_v(u, 0) = N(u, 0) \wedge X_u(u, 0).$$

Por causa de

$$\langle X_u(u, 0), X_v(u, 0) \rangle = 0$$

e de

$$\langle n(u), c'(u) \rangle = 0, \quad \|N(u, 0)\| = \|n(u)\| = 1,$$

concluimos que

$$N(u, 0) = n(u).$$

■

2.2 A solução de Riemann

Nesta seção veremos como Riemann determinou as superfícies mínimas que são folheadas por circunferências. Sabemos pelo Teorema 2.3 que tais circunferências estão em planos paralelos. Tomemos como parâmetro de folheação a função altura, de modo que $M \cap \{z = c\}$, c constante arbitrária, é por hipótese uma circunferência, cujo centro e o raio denotaremos respectivamente por $(\alpha(z), z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), z)$ e $r(z)$, onde α_1 , α_2 e r são funções de classe C^2 definidas num intervalo aberto $(z_0, z_1) \subset \mathbb{R}$. Denotemos por E' a derivada com respeito a z de qualquer expressão $E(z)$. Por conveniência, em alguns momentos usaremos a notação $x = x_1$ e $y = x_2$, e identificaremos $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com \mathbb{R}^3 .

Vamos determinar explicitamente uma parametrização X para a superfície que descreva o comportamento das circunferências com relação à altura, conforme [6].

Considere a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 \times (z_0, z_1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, z) &\mapsto F(p, z) = \|p - \alpha(z)\|^2 - r^2(z), \end{aligned}$$

onde $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Seja $M \subset F^{-1}(\{0\})$ uma superfície. Temos pelo Lema 2.1 que M é mínima se, e somente se

$$F_z^2 + \|p - \alpha\|^2(2 + F_{zz}) + 2\langle p - \alpha, \alpha' \rangle F_z = 0 \quad (2.12)$$

em M . De fato, observando que $F(p, z)$ pode ser escrita como

$$F(x, y, z) = (x - \alpha_1(z))^2 + (y - \alpha_2(z))^2 - r^2(z),$$

podemos verificar que $F_{x_i} = 2(x_i - \alpha_i(z))$, $F_{x_i x_i} = 2$, $F_{x_i z} = -2\alpha'_i(z)$, $i = 1, 2$, $F_{xy} = 0$ e $F_z = -2(x - \alpha_1(z))\alpha'_1(z) - 2(y - \alpha_2(z))\alpha'_2(z) - 2r(z)r'(z)$. Vamos determinar uma expressão para $(\nabla F)(\|\nabla F\|)$ em função das derivadas parciais de F . Temos que

$$\begin{aligned} (\nabla F)(\|\nabla F\|) &= \begin{bmatrix} \|\nabla F\|_x & \|\nabla F\|_y & \|\nabla F\|_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ &= \|\nabla F\|_x F_x + \|\nabla F\|_y F_y + \|\nabla F\|_z F_z \\ &= \frac{1}{\|\nabla F\|} [F_x \cdot (F_x F_{xx} + F_y F_{yx} + F_z F_{zx}) + \\ &\quad F_y \cdot (F_x F_{xy} + F_y F_{yy} + F_z F_{zy}) + F_z \cdot (F_x F_{xz} + F_y F_{yz} + F_z F_{zz})]. \end{aligned}$$

Sendo M mínima, então $\|\nabla F\|\Delta F = (\nabla F)(\|\nabla F\|)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|\nabla F\|^2 \Delta F &= F_x \cdot (F_x F_{xx} + F_y F_{yx} + F_z F_{zx}) \\ &\quad + F_y \cdot (F_x F_{xy} + F_y F_{yy} + F_z F_{zy}) + F_z \cdot (F_x F_{xz} + F_y F_{yz} + F_z F_{zz}). \end{aligned}$$

Substituindo

$$\|\nabla F\|^2 \Delta F = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)(F_{xx} + F_{yy} + F_{zz})$$

e os valores de F_{xx} , F_{yy} e F_{xy} , depois fazendo as devidas simplificações, chegaremos em

$$(F_x^2 + F_y^2)(2 + F_{zz}) + 4F_z^2 = 2(F_x F_z F_{xz} + F_y F_z F_{yz}).$$

Logo,

$$4[(x - \alpha_1)^2 + (y - \alpha_2)^2](2 + F_{zz}) + 4F_z^2 = -8[(x - \alpha_1)\alpha'_1 + (y - \alpha_2)\alpha'_2]F_z.$$

Assim

$$\|p - \alpha\|^2(2 + F_{zz}) + F_z^2 + 2F_z\langle p - \alpha, \alpha' \rangle = 0,$$

como queríamos.

Obteremos agora uma função que descreva o comportamento do centro das circunferências. Em M vale $\|p - \alpha(z)\|^2 = r^2(z)$, visto que $F(M) = 0$, e vale

$$2\langle p - \alpha, \alpha' \rangle = -(\|p - \alpha\|^2)_z = -(F + r^2)_z = -F_z - (r^2)'. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) na condição (2.12) temos que a minimalidade de M é expressa como

$$2r^2 + r^2F_{zz} - (r^2)'F_z = 0. \quad (2.14)$$

Dividindo por r^4 ,

$$0 = \frac{2}{r^2} + \frac{r^2F_{zz} - (r^2)'F_z}{r^4} = \frac{2}{r^2} + \left(\frac{F_z}{r^2}\right)_z,$$

e integrando em relação a z , chegamos a

$$f(p) = 2 \int^z \frac{du}{r^2(u)} + \frac{F_z(p, z)}{r^2(z)}, \quad (2.15)$$

para certa função f de p . Temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{F_z}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_z}{\partial x_i} = -\frac{2\alpha'_i}{r^2}, \quad i = 1, 2,$$

são funções que só dependem de z , assim $\frac{F_z}{r^2}$ é afim como função de p . Como $\int^z \frac{du}{r^2(u)}$ só depende de z , a equação (2.15) implica que $f(p)$ é uma função afim. Portanto

$$2 \int^z \frac{du}{r^2(u)} + \frac{F_z(p, z)}{r^2(z)} = 2\langle a, p \rangle + c \quad (2.16)$$

para certo $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Derivando (2.16) com respeito a x_i obtemos $\alpha'_i(z) = -a_i r^2(z)$, logo

$$\alpha(z) = -a \int^z r^2(u) du.$$

Portanto, a menos de uma translação horizontal independente da altura, determinamos as duas primeiras coordenadas do centro da circunferência $M \cap \{z = c\}$.

A equação (2.13) nos diz que $F_z = -2\langle p - \alpha, \alpha' \rangle - (r^2)'$, assim $F_{zz} = 2\|\alpha'\|^2 - 2\langle p - \alpha, \alpha'' \rangle - (r^2)''$. Substituindo $\alpha' = -ar^2$ nestas duas expressões obtemos

$$F_z = -2\langle p - \alpha, -r^2 a \rangle - (r^2)',$$

$$F_{zz} = 2\| -r^2 a \|^2 - 2\langle p - \alpha, -2rr'a \rangle - (r^2)'',$$

e estas por sua vez em (2.14), obtemos que a minimalidade de M é dada por

$$2\|a\|^2 r^6 + r^2(2 - (r^2)'') + (r^2)^2 = 0, \quad (2.17)$$

que é uma EDO com respeito à função $r^2(z)$. Para resolver (2.17), denotemos $r^2(z) = q(z)$ e observemos que ela é equivalente a

$$-qq'' + q'^2 + 2q + 2q^3\|a\|^2 = 0.$$

Assim

$$\left(\frac{q'^2}{q^2}\right)' = \frac{2q'}{q^3}(-q'^2 + qq'') = \frac{2q'}{q^3}(2\|a\|^2 q^3 + 2q) = 4\left(\|a\|^2 q' + \frac{q'}{q^2}\right).$$

Logo, integrando com respeito a z obtemos

$$\frac{q'^2}{q^2} = 4\left(\|a\|^2 q - \frac{1}{q} + \lambda\right), \quad (2.18)$$

para certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Observemos que $\|a\|^2 q - \frac{1}{q} + \lambda$ deve ser não-negativo. De (2.18) chegamos em

$$\frac{dq}{dz} = 2\sqrt{\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2}, \quad (2.19)$$

logo a diferencial altura de M é

$$dz = \frac{dq}{2\sqrt{\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2}}.$$

Considerando q como variável real, a função altura de M , que descreve a terceira coordenada do centro da circunferências, se escreve como

$$z(q) = \frac{1}{2} \int^q \frac{du}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}}. \quad (2.20)$$

Vamos utilizar as expressões obtidas para escrevermos nossa parametrização X . Precisamos de mais outra variável real, que denotaremos por v , para percorrer a circunferência. Consideremos agora a circunferência centrada em $(\alpha, 0)$ e de raio r . Assim temos

$$\begin{aligned} \alpha(z(q)) + \sqrt{q}e^{iv} &= -a \int^{z(q)} q(z) dz + \sqrt{q}e^{iv} = -a \int^q q \frac{dz}{dq} dq + \sqrt{q}e^{iv} \\ &= -\frac{a}{2} \int^q \frac{u du}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}} + \sqrt{q}e^{iv}, \end{aligned}$$

onde $0 \leq v < 2\pi$. Esta última igualdade fornece as duas primeiras coordenadas de X , a terceira coordenada será a função altura. Portanto, temos a seguinte parametrização X de M

$$X(q, v) = f(q)(a, 0) + \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z(q)), \quad (2.21)$$

onde $f(q) = -\frac{1}{2} \int^q \frac{udu}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}}$ e $z(q)$ é dada por (2.20).

Observamos que $f(q)(a, 0)$ descreve o movimento do centro da circunferência, a expressão $\sqrt{q}(e^{iv}, 0)$ parametriza a circunferência horizontal e $(0, z(q))$ posiciona a circunferência na altura $z(q)$. Como $q = r^2 \geq 0$, da equação $\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2$ obtemos que existe um $q_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que para qualquer $q \in [q_1, \infty)$ tem-se $\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2 \geq 0$. Observemos também que o integrando de $z(q)$ é uma função positiva, logo z é uma função crescente.

Fixar q_1 como sendo o limite inferior de integração de $z(q)$ e $f(q)$ fornece duas interpretações geométricas. A saber, de $z(q)$ temos que a circunferência de menor raio da superfície M é transladada verticalmente para a altura $z = 0$, e de $f(q)$ temos o centro de tal circunferência é transladada horizontalmente para a origem de \mathbb{R}^3 .

Como em (2.19) tomamos a raiz positiva, a superfície M está situada no semi-espço $z \geq 0$. Para obter outra superfície no semi-espço $z \leq 0$ com a mesma borda em $z = 0$, basta tomar a raiz negativa. A união destas duas superfícies mínimas é uma superfície mínima pelo Teorema 2.6, visto que os espaços tangentes de ambas coincidem ao longo da curva comum à altura zero. De fato, de (2.21) temos que

$$X(q, v) = f(q(z))(a, 0) + \sqrt{q(z)}(e^{iv}, 0) + (0, z).$$

Assim

$$\begin{aligned} X_z &= f_q q_z(a, 0) + \frac{1}{2\sqrt{q(z)}} q_z(e^{iv}, 0) + (0, 1) \\ &= -q(a, 0) + \frac{\sqrt{\|a\|^2 q^2 - q + \lambda q^2}}{\sqrt{q(z)}}(e^{iv}, 0) + (0, 1). \end{aligned}$$

Fazendo o limite quando q tende a q_1 , chegamos a

$$X_z = -q_1(a, 0) + \frac{1}{\sqrt{q_1}} \cdot 0 \cdot (e^{iv}, 0) + (0, 1) = (-q_1 a_1, -q_1 a_2, 1).$$

Se tomarmos a raiz negativa em (2.19), obteremos o negativo da mesma expressão para a equivalente X_z , de modo que os espaços tangentes na altura $z = 0$, tanto para a superfície no semi-espço positivo $z \geq 0$ quanto para o semi-espço negativo $z \leq 0$, são iguais.

Analisaremos, a partir de agora, os casos em que $a = (0, 0)$ e $a \neq (0, 0)$.

Primeiro caso: $a = (0, 0)$. O catenóide.

Neste caso a parametrização X é dada por

$$X(q, v) = \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z(q)),$$

e $z(q) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{-u + \lambda u^2}}$. Para determinar q_1 notemos de (2.18) que a constante λ é necessariamente positiva e que a função $u \rightarrow -u + \lambda u^2$ é não-negativa em $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{\lambda}, \infty)$. Como estamos interessados em intervalos tal que $q \geq 0$, devemos tomar $q_1 = \frac{1}{\lambda}$. Neste caso a integral que define $z(q)$ pode ser resolvida explicitamente, o que nos dá

$$z(q) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{-u + \lambda u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arccosh} \sqrt{q\lambda}.$$

Assim, a parametrização para a superfície escreve-se como

$$X(q, v) = \left(\sqrt{q}e^{iv}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arccosh} \sqrt{q\lambda} \right), \quad (2.22)$$

que é um semi-catenóide situado no semi-espço $z \geq 0$, e cuja circunferência de menor raio está situada na altura $z = 0$. Se considerarmos a raiz negativa em (2.19), obteremos um semi-catenóide contido no semi-espço $z \leq 0$. A união das duas superfícies obtidas é o catenóide.

Segundo caso: $a \neq (0, 0)$. Os exemplos de Riemann.

Estudaremos inicialmente a influência da constante a sobre a superfície. Observe que rotacionar $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ pela origem de \mathbb{C} deixa $f(q)$ e $z(q)$ invariantes, visto que ambos dependem só de $\|a\|$. Somente o centro da circunferência sofre um giro de mesmo ângulo em torno do eixo vertical. Assim, podemos tomar $a = (a, 0) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$. Portanto, o radicando da equação (2.20) toma a forma $u(a^2u^2 - 1 + \lambda u)$. De modo análogo ao primeiro caso, a função $u \rightarrow u(a^2u^2 - 1 + \lambda u)$ é não-negativa em $[\frac{1}{2a^2}(-\lambda - \sqrt{4a^2 + \lambda^2}), 0] \cup [q_1, \infty)$, onde $q_1 = \frac{1}{2a^2}(-\lambda + \sqrt{4a^2 + \lambda^2})$ e o intervalo procurado é $[q_1, \infty)$. Com este limite inferior de integração, chamaremos $z_{a,\lambda}(q)$ e $f_{a,\lambda}(q)$ as funções assim obtidas. Mostraremos agora que a constante a é apenas um fator de homotetia. Isto é verificado por uma simples troca de variável, o que nos mostra como dependem estas funções de seus parâmetros:

$$z_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq) = \frac{1}{2} \int \frac{adq}{\sqrt{(aq)^3 - aq + \frac{\lambda}{a}(aq)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{adq}{\sqrt{a}\sqrt{a^2q^3 - q + \lambda q^2}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{a^2q^3 - q + \lambda q^2}},$$

e

$$f_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq) = -\frac{1}{2} \int \frac{aq \cdot a dq}{\sqrt{(aq)^3 - aq + \frac{\lambda}{a}(aq)^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{a^2 q dq}{\sqrt{a} \sqrt{a^2 q^3 - q + \lambda q^2}} = -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2} \int \frac{q dq}{\sqrt{a^2 q^3 - q + \lambda q^2}},$$

ou seja,

$$\sqrt{a} z_{a,\lambda}(q) = z_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq) \quad a^{\frac{3}{2}} f_{a,\lambda}(q) = f_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq).$$

Por consequência, as imersões mínimas $X_{a,\lambda}(q, v)$ e $X_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq, v)$ se relacionam mediante a equação

$$\sqrt{a} X_{a,\lambda}(q, v) = X_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq, v). \quad (2.23)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} X_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq, v) &= f_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq)(1, 0) + \sqrt{aq}(e^{iv}, 0) + (0, z_{1,\frac{\lambda}{a}}(aq)) \\ &= \sqrt{a} f_{a,\lambda}(q)(1, 0) + \sqrt{a} \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + \sqrt{a}(0, z_{a,\lambda}(q)) \\ &= \sqrt{a} [f_{a,\lambda}(q)(a, 0) + \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z_{a,\lambda}(q))] \\ &= \sqrt{a} X_{a,\lambda}(q, v). \end{aligned}$$

A equação (2.23) significa que as correspondentes superfícies se diferenciam por homotetia de razão \sqrt{a} . Assim, podemos assumir que $a = 1$, logo nossas superfícies só dependem do parâmetro real λ . Desta forma temos

$$X_\lambda(q, v) = f_\lambda(q)(1, 0) + \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z_\lambda(q)), \quad (2.24)$$

sendo

$$f_\lambda(q) = -\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{u du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}}, \quad z_\lambda(q) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2} \right).$$

Vamos estudar agora o comportamento da superfície quando q percorre o intervalo $[q_1, \infty)$. Chamemos M_λ a imagem de $X_\lambda : [q_1, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Notemos que o centro de cada circunferência $M_\lambda \cap \{z = z_\lambda(q)\}$ está no plano vertical $y = 0$, de onde imediatamente deduzimos que M_λ é simétrica por reflexão em $y = 0$, plano este que chamaremos Π .

Temos que a função crescente $q \rightarrow z_\lambda(q)$, $q \in [q_1, \infty)$, é agora limitada visto que $\int^q \frac{du}{\sqrt{u^3}} = -\frac{2}{\sqrt{q}}$ tem limite zero quando $q \rightarrow \infty$. Geometricamente, isto nos diz que M_λ está contida numa faixa horizontal do tipo

$$\mathcal{F}(0, \zeta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \zeta\},$$

em que $\zeta = \zeta(\lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} z_\lambda(q) > 0$.

Vejamos qual o comportamento de M_λ na interseção dela com o plano $z = \zeta$. Vimos que M_λ é simétrica por reflexão em Π . Temos que para um $q \in [q_1, \infty)$, a circunferência $M_\lambda \cap \{z = z_\lambda(q)\}$ corta Π em dois pontos opostos pelo diâmetro. Denotaremos estes pontos por $A(q)$ e $B(q)$, que são obtidos fazendo $\sin v = 0$ em (2.24). As expressões para $A(q)$ e $B(q)$ são dadas por

$$A(q) = \left(-\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{udu}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} + \sqrt{q}, z_\lambda(q) \right) \text{ e}$$

$$B(q) = \left(-\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{udu}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} - \sqrt{q}, z_\lambda(q) \right),$$

ambos pertencentes a $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Como q é não-limitada, a primeira coordenada de $B(q)$ tende a $-\infty$ quando q tende a ∞ . Contudo, o limite da primeira coordenada de $A(q)$ é finito. De fato, observe que

$$\begin{aligned} -\frac{u}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} + \frac{1}{\sqrt{u}} &= \frac{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2} - u\sqrt{u}}{\sqrt{u}\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} \cdot \frac{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2} + u\sqrt{u}}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2} + u\sqrt{u}} \\ &= \frac{\lambda u^2 - u}{u^{\frac{7}{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{u^2} + \frac{\lambda}{u}} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{u^2} + \frac{\lambda}{u}} \right)}, \end{aligned}$$

cujas integral de $[q_1, \infty)$ converge para um valor $2c(\lambda)$. Deste modo

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{q} - \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{udu}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} \right\} &= \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{q} - \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{udu}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} + \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{u}} \right\} &= \\ = c(\lambda) + \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{q} - \sqrt{u} \Big|_{q_1}^q \right\} &= c(\lambda) + \sqrt{q_1}. \end{aligned}$$

Portanto, quando $q \rightarrow \infty$, $A(q)$ converge para um ponto $\mathcal{A} \in \{z = \zeta\} \cap \Pi$. Isto mostra que $M_\lambda \cap \{z = \zeta\} \neq \emptyset$. Como esta interseção é também não-compacta, pois $B(q)$ tende a $-\infty$, concluímos que tal interseção é uma reta horizontal ortogonal a Π passando por \mathcal{A} .

Observe que nossa superfície M_λ possui como bordas uma circunferência na altura $z = 0$ e uma reta r ortogonal a Π em $z = \zeta$. Tomando a raiz negativa em $\frac{dq}{dz}$ obteremos uma superfície M'_λ compreendida na faixa $\mathcal{F}(-\zeta, 0)$ cujas bordas são uma circunferência

na altura $z = 0$ e uma reta r' ortogonal ao plano Π na altura $z = -\zeta$, passando por um ponto \mathcal{A}' equivalente a \mathcal{A} . Como vimos, a união dessas duas superfícies é uma superfície mínima, $\mathcal{M} = M_\lambda \cup M'_\lambda$. Pelo Princípio de Reflexão de Schwarz, podemos aplicar uma rotação de 180° em \mathcal{M} em torno de r , e denotando $Rot_r(\mathcal{M})$ como sendo a superfície obtida pela rotação, temos que $\mathcal{M} \cup Rot_r(\mathcal{M})$ é uma superfície mínima compreendida na faixa $\mathcal{F}(-\zeta, 3\zeta)$ cujas bordas são retas. Assim novamente podemos aplicar o Princípio de Reflexão de Schwarz. Repetindo este processo em ambas as bordas das superfícies obtidas, encontraremos uma superfície mínima completa $R_\lambda \subset \mathbb{R}^3$, com infinitas retas paralelas contidas nos planos $\{z = (2k+1)\zeta : k \in \mathbb{Z}\}$ e ortogonais ao plano Π , e que é invariante por translação do vetor $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$, que porém inverte a orientação de R_λ . Estas superfícies R_λ são conhecidas como *Superfícies mínimas de Riemann*, veja Figura 2.1. Em cada exemplo de Riemann, as circunferências de menor raio estão contidas nos planos $\{z = (2k)\zeta : k \in \mathbb{Z}\}$ e seu raio é $\sqrt{q_1(\lambda)}$. Como a função $q_1(\lambda) = \frac{-\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$ é injetora, concluímos que R_{λ_1} não é congruente a R_{λ_2} se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

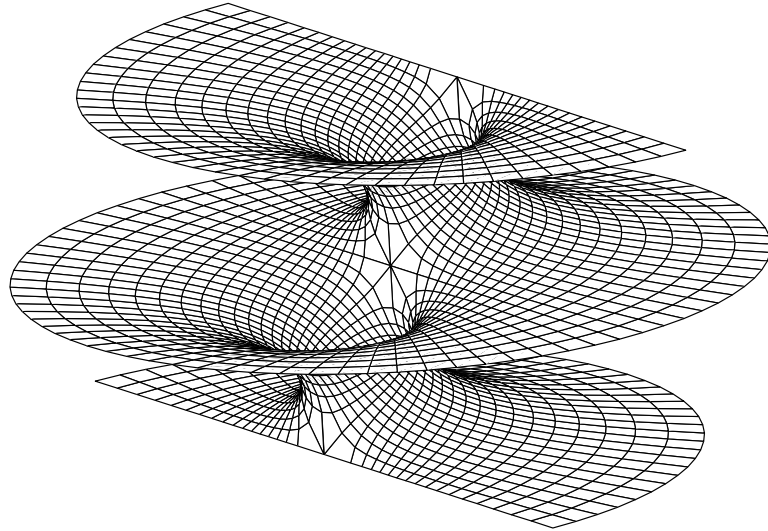


Figura 2.1: Uma das superfícies mínimas de Riemann.

2.2.1 As superfícies de Riemann

Visto como superfície completa em \mathbb{R}^3 , cada exemplo de Riemann R_λ tem a topologia de um cilindro menos uma quantidade infinita e discreta de pontos, os quais são chamados de *fins*, e é invariante por uma translação T_λ pelo vetor $2(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$. Fazendo o quociente $\mathcal{R}_\lambda = R_\lambda/T_\lambda$ obtemos um toro T menos dois pontos na variedade tridimensional \mathbb{R}^3/T_λ . Além disso, a aplicação de Gauss se induz sobre \mathcal{R}_λ , tem grau dois e exatamente dois pontos de ramificação, como veremos a seguir. Temos então que a aplicação de Gauss é uma função meromorfa sobre o toro pontuado de grau dois e com zeros e pólos duplos nos dois fins. De fato, vamos considerar a circunferência \mathcal{C} de raio $\sqrt{q_1}$ no plano $z = 0$ e simétrica com relação ao plano Π . Considere o eixo y . Como a parametrização $X(q, v)$ ou $X(z, v)$ é tal que $X_z|_{\mathcal{C}}$ é o vetor constante $(-q_1 a, 0, 1)$, uma rotação de 180° em torno do eixo x_2 nos dará o campo $-X_z|_{\mathcal{C}}$. Pelo Teorema de Björling, a superfície R_λ é então invariante por rotação de 180° em torno de x_2 . Portanto, se g é zero no final E_1 então g é infinito no final E_2 , e a ordem de g é a mesma nos dois fins.

Uma vez que $X : T \setminus \{2 \text{ pontos}\} \rightarrow \mathbb{R}^3/T_\lambda$ é imersão mínima, então $\phi_3 := dx_3 + idx_3^*$ está globalmente definida e é holomorfa no toro. Como o grau de qualquer diferencial meromorfa numa superfície R compacta é dada por $-\chi$, o negativo da característica de Euler, vide [[2],p139], então ϕ_3 não tem pólos nem zeros no toro. Os fins planares de R_λ são folheados por circunferências e portanto R_λ é completa. Da discursão da demonstração do Teorema 1.31 temos que a função local f para os dados de Weierstrass é tal que $\int_C |f| |d\zeta| = \infty$, para todo caminho divergente C . Assim, o Lema 1.29 nos diz que f não tem singularidade essencial no infinito, seja E_1 ou E_2 . Portanto faz sentido falar de ordem de pólo e zero de f em E_1 e E_2 . Mas não sabemos se f está globalmente definida. Vejamos que sim. Acabamos de ver que ϕ_3 não tem zeros nem pólos no toro. Como a dimensão do espaço vetorial dos diferenciais holomorfos no toro é um, ver [[2],p183], então $\phi_3 = cdZ$, c constante complexa, onde $Z : \mathbb{C} \rightarrow T$ é o recobrimento universal do toro. Logo, podemos definir

$$f(Z) = \frac{\phi_3/dZ}{g(Z)} = \frac{c}{g(Z)}.$$

Pelo Teorema de Representação de Weierstrass, f só pode ter zeros nos pólos de g que pertençam ao domínio (toro menos dois pontos). Se g tivesse pólos no domínio, ali teríamos $\text{ord}(f) \geq 2$. Como os dois fins são planos horizontais, $\text{ord}_{E_1}(f) \geq -n$ e $\text{ord}_{E_2}(f) \geq n$. Ou

seja, $\text{grau}_{\overline{R}_\lambda}(f) \geq 2 + n - n = 2$. Mas o número de zeros de uma função meromorfa é igual ao seu número de pólos, veja [[2],p30]. Assim, $\text{grau}_{\overline{R}_\lambda}(f) = 0$ e portanto g não tem pólos no domínio.

Sem perda de generalidade, podemos considerar uma carta local z em E_1 e $g(z) = z^n$, ou seja, $z = 0$ é levado no fim E_1 . Assim $f(z) = \frac{c}{z^n}$.

Escrevendo os dados de Weierstrass, temos para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ que

$$\text{Re} \int \frac{c}{2} (z^{-n} - z^n, iz^{-n} + iz^n, 2) dz = \text{Re} \left[\frac{c}{2} \left(\frac{z^{-n+1}}{-n+1} - \frac{z^{n+1}}{n+1}, \frac{iz^{-n+1}}{-n+1} + \frac{iz^{n+1}}{n+1}, 2z \right) \right].$$

Para $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho \approx 0$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\cong \frac{c}{2} \left(\frac{\rho^{-n+1}}{1-n} \cos((1-n)\theta), -\frac{\rho^{-n+1}}{1-n} \sin((1-n)\theta), 2\rho \cos \theta \right) \\ &= \frac{c\rho}{2(1-n)} (\rho^{-n} \cos((1-n)\theta), -\rho^{-n} \sin((1-n)\theta), 2(1-n) \cos \theta). \end{aligned}$$

Considerando z como uma carta de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ na superfície, temos que uma circunferência em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ é levado em uma circunferência, dada pela expressão acima, que contorna a superfície. Consideremos que o ponto \mathcal{A} esteja situado na origem de \mathbb{R}^3 , de modo que a reta r coincida com o eixo y , temos que quando a circunferência passa do semi-espaco superior para o inferior, esta circunferência intercepta a reta r , implicando que $x_1 = x_3 = 0$. Pela última expressão acima, deduzimos da terceira coordenada que x_3 se anula duas vezes, e da expressão de x_1 obtemos que $n = 2$, visto que as duas coordenadas devem se anular simultaneamente.

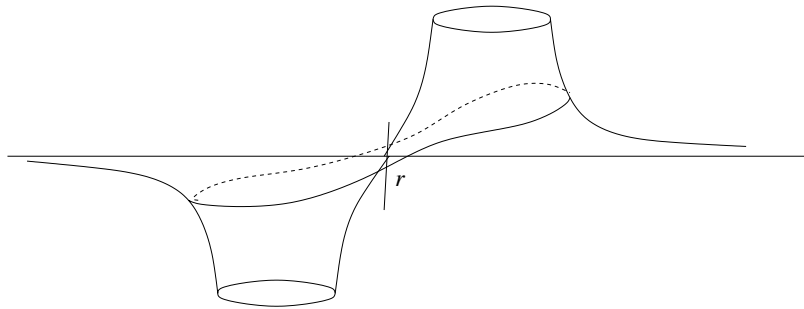


Figura 2.2: Curva passando pela reta r e contornando a superfície.

2.2.2 As simetrias da superfície de Riemann

Todo toro com estrutura C^ω está associado a um recobrimento universal que é um plano munido de um reticulado [[2],p212]. Este reticulado é único, a menos de homotetias, translação e rotação do plano, e é determinado pela estrutura C^ω . Vamos defini-lo pelas coordenadas 1 e w , conforme Figura 2.3.

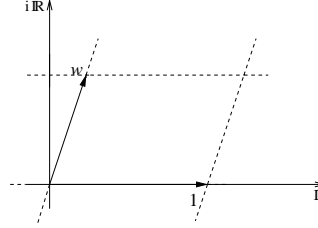


Figura 2.3: Coordenadas que definem o reticulado no plano \mathbb{C} .

Considere a involução $\rho : T \rightarrow T$ induzida por rotação de 180° em torno da origem de \mathbb{C} . Assim vemos que ρ tem quatro pontos fixos, os quais são 0 , $\frac{w}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1+w}{2}$.

O Teorema de Euler-Poincaré diz que se R é uma superfície compacta e existem uma aplicação $\rho : R \rightarrow R$ e $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\rho^m = \rho \circ \dots \circ \rho = Id : R \rightarrow R$ com exatamente n pontos fixos, em que $\#\{p, \rho(p), \dots, \rho^{m-1}(p)\}$ é sempre igual a 1 ou m , para qualquer $p \in R$, então

$$\chi(R/\rho) = \frac{\chi(R)}{m} + n \cdot \frac{m-1}{m}.$$

Desta forma, tendo em vista que $m = 2$ e $\chi(T) = 0$, temos $\chi(T/\rho) = 2$. Como T/ρ é uma superfície compacta de gênero 0, pelo Teorema de Uniformização de Koebe (ver [2]), existe um biholomorfismo $\mathcal{D} : T/\rho \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Como vimos, a superfície R_λ possui duas retas paralelas, r e r' , sendo que R_λ é invariante por rotação de 180° em torno delas. Ou seja, R_λ possui uma involução anti-conforme cujo conjunto de pontos fixos $r \cup r'$ tem exatamente duas componentes conexas, implicando assim que, R_λ é um toro retangular. Neste caso, $w \in i\mathbb{R}_+^*$ e a menos de uma transformação de Möbius, podemos definir a função \wp simétrica de Weierstrass como $\wp = \mathcal{D} \circ (\cdot/\rho) : T \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\wp(0) = 0^2, \quad \wp\left(\frac{1}{2}\right) = -\tan \alpha, \quad \wp\left(\frac{1+w}{2}\right) = \infty^2 \text{ e } \wp\left(\frac{w}{2}\right) = \cot \alpha,$$

para $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, similarmente a [[8],p40]. Os valores $-\tan \alpha$ e $\cot \alpha$ de \wp têm multiplicidade dois. A aplicação \wp possui a propriedade $\wp(z) = \wp(-z)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, e $\wp\left(\frac{1+w}{4}\right) = i$.

Note que \wp pode ser considerada com domínio em \mathbb{C} , e neste caso é uma função duplamente periódica. Portanto existe \wp' meromorfa. Ocorre que \wp'^2 e $\wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha)$ possuem os mesmos pólos e zeros, e portanto existe uma constante c_0 complexa não-nula, ver [[2],p30], tal que

$$\wp'^2 = c_0 \wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha). \quad (2.25)$$

A constante $c_0 = |c_0|e^{i\arg\{c_0\}}$ influencia apenas o reticulado de T em \mathbb{C} quanto à homotetia em função de $|c_0|$ e à rotação dependendo de $\arg\{c_0\}$. Por isso podemos tomar $c_0 = 1$. A equação (2.25) torna-se

$$\wp'^2 = \wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha). \quad (2.26)$$

Temos que existe uma única superfície de Riemann associada à equação $\wp'^2 = \wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha)$, ver [[2],p53]. Então esta superfície tem que ser o toro, pois foi a partir dele que deduzimos tal equação. A dimensão do espaço vetorial das diferenciais holomorfas no toro é igual a um, ver [[2],p138]. Como dz é a diferencial holomorfa de \mathbb{C} , então $dz = B \frac{d\wp}{\wp'}$, $B \in \mathbb{C}^*$. A diferencial $\frac{d\wp}{\wp'}$ é holomorfa e no toro não possui zeros nem pólos.

Com estas considerações deduzimos que a aplicação de Gauss é dada por

$$g^\alpha(\wp, \wp') = \beta \wp.$$

para certa constante $\beta = \beta(\alpha) \in \mathbb{C}^*$. De fato, sendo g^α uma função meromorfa de grau dois em $\overline{R_\lambda}$, com $g^\alpha(z=0) = 0^2$ e $\wp(z=0) = 0^2$, temos localmente que

$$\frac{1}{g^\alpha(z)} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

e

$$\frac{1}{\wp(z)} = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

onde a_{-2} e b_{-2} são não-nulos. Assim a função κ dada por

$$\kappa = \frac{b_{-2}}{g^\alpha} - \frac{a_{-2}}{\wp} \quad (2.27)$$

tem no máximo um pólo em $\overline{R_\lambda}$.

Suponha que κ tem um pólo, assim κ tem um zero, logo é injetora em $\widehat{\mathbb{C}}$ e deste modo teremos que o toro é biholomorfo à uma esfera, o que é uma contradição. Portanto κ não tem pólo, logo ela deve ser constante.

Vamos mostrar que $\kappa = 0$. Da igualdade (2.27) e das séries de $\frac{1}{g^\alpha}$ e $\frac{1}{\wp}$ obtemos

$$\kappa = \frac{b_{-2}a_{-1} - b_{-1}a_{-2}}{z} + b_{-2}a_0 - b_0a_{-2} + \dots$$

Assim $b_{-2}a_{-1} - b_{-1}a_{-2} = 0$, ou seja, $a_{-1} = \frac{a_{-2}}{b_{-2}}b_{-1}$. De modo análogo, concluimos que

$$a_j = \frac{a_{-2}}{b_{-2}}b_j, \text{ para qualquer } j = -1, 0, 1, 2, \dots$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^\alpha} &= \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-2}}{b_{-2}} \left(\frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1z + \dots \right) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-2}}{b_{-2}} \left(\frac{1}{\wp} - \frac{b_{-2}}{z^2} \right) \\ &= \frac{a_{-2}}{z^2} - \frac{a_{-2}}{b_{-2}} \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-2}}{b_{-2}} \frac{1}{\wp} = \frac{a_{-2}}{b_{-2}} \frac{1}{\wp}. \end{aligned}$$

Assim

$$g^\alpha = \beta \wp,$$

onde $\beta = \frac{a_{-2}}{b_{-2}}$.

Cada superfície R_λ é invariante por alguns movimentos rígidos no espaço. Estes movimentos induzem isometrias intrínsecas da superfície. Tais simetrias se traduzem em automorfismos da equação algébrica (2.26), holomorfos se preservam orientação de R_λ ou anti-holomorfos se invertem.

Uma das isometrias é a simetria com respeito a uma reta passando pelo centro da circunferência de menor raio e paralela ao eixo y . Denotaremos esta isometria por S_1 . Vejamos como S_1 atua sobre g^α . A aplicação pode ser representada no reticulado como um giro de 180° em torno do ponto $\frac{1+w}{4}$, conforme Figura 2.4. Analiticamente,

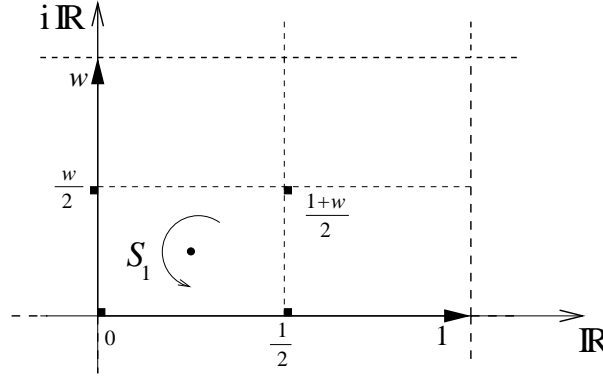
$$S_1(z) = -z + \frac{1+w}{2},$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Esta simetria é uma transformação holomorfa que atua sobre g^α fixando os pontos i e $-i$, e trocando os fins. Assim g^α é levado em $-\frac{1}{g^\alpha}$, e portanto

$$g^\alpha \circ S_1 = -\frac{1}{g^\alpha}.$$

Como $g^\alpha(\wp, \wp') = \beta \wp$, temos que $\beta \wp$ é levado em $-\frac{1}{\beta \wp}$, logo \wp é levado em $-\frac{1}{\beta^2 \wp}$. Mas S_1 leva \wp em $-\frac{1}{\wp}$, assim $\frac{1}{\wp} = \frac{1}{\beta^2 \wp}$. Portanto $\beta = \pm 1$. Como $g^\alpha(\wp, \wp') = -\wp$ equivale a rotacionar a superfície de 180° em torno de uma reta paralela ao eixo z , podemos considerar

$$g(\wp, \wp') = g^\alpha(\wp, \wp') = \wp.$$

Figura 2.4: A simetria S_1 .

Observe que S_1 intercambia os pontos $\frac{1}{2}$ e $\frac{w}{2}$, e também os pontos $\frac{1+w}{2}$ e 0. Desta forma, S_1 leva \wp em $-\frac{1}{\wp}$. Vejamos como S_1 atua sobre \wp' . Temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\wp} \left(-\frac{1}{\wp} + \tan \alpha \right) \left(-\frac{1}{\wp} - \cot \alpha \right) &= \frac{1}{\wp^3} (-1 + \wp \tan \alpha) (1 + \wp \cot \alpha) \\ &= \frac{\tan \alpha}{\wp^3} \left(-\frac{1}{\tan \alpha} + \wp \right) (1 + \wp \cot \alpha) = \frac{\tan \alpha \cot \alpha}{\wp^3} \left(-\frac{1}{\tan \alpha} + \wp \right) \left(\frac{1}{\cot \alpha} + \wp \right) \\ &= \frac{\wp}{\wp^4} (-\cot \alpha + \wp) (\tan \alpha + \wp) = \frac{\wp'^2}{\wp^4}. \end{aligned}$$

Assim, \wp'^2 é levado em $\frac{\wp'^2}{\wp^4}$, logo \wp' é levado em $\pm \frac{\wp'}{\wp^2}$. Como o sinal só interfere no sentido em que o eixo y perfura a superfície, podemos escolher o sinal de menos. Portanto,

$$S_1(\wp, \wp') = \left(-\frac{1}{\wp}, -\frac{\wp'}{\wp^2} \right).$$

A função \wp possui a propriedade que dada duas classes de equivalência $p, q \in T$, se $\frac{p+q}{2}$ for fixada por S_1 , então $\wp(p) = -\frac{1}{\wp(q)}$. Os pontos fixados por S_1 são $\frac{1+w}{4}$, $\frac{3(1+w)}{4}$, $\frac{1+3w}{4}$ e $\frac{3+w}{4}$.

Uma segunda isometria é a rotação de 180° com respeito à reta r passando pelo ponto \mathcal{A} e paralela ao eixo y , reta esta obtida na seção 2.2 quando estudamos o caso $a \neq (0, 0)$. Como vimos, esta simetria que chamaremos de S_2 , é uma invariante anti-holomorfa de R_λ em R_λ , cujo conjunto de pontos fixos é exatamente $r \cup r'$.

A atuação de S_2 sobre g é dada por

$$g \circ S_2 = \bar{g}.$$

Como essa transformação fixa os pontos de ramificação de g , temos duas conclusões. A primeira é que $B \in \{\pm 1, \pm i\}$. De fato, tomemos $\phi_3 = Bdz$. Se a reta for $z(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$

então $\phi_3(z(t)) = Bdt$. Mas sobre as retas r e r' temos $\operatorname{Re} \int \phi_3 = 0$, pois ali a terceira coordenada da superfície é constante. Então B é imaginário puro. Como $|B|$ só contribui para homotetias de R_λ em \mathbb{R}^3 , podemos tomar $|B| = 1$ e assim $B = \pm i$. Analogamente, se a reta for $z(t) = it$, $t \in \mathbb{R}$, obteremos que $B = \pm 1$. Fixaremos que a reta r seja dada por $z(t) = it$, pois se considerarmos $z(t) = t$, uma rotação de 90° em torno da origem é uma transformação levando $z(t) = t$ em $z(t) = it$, e tais transformações não alteram a superfície. Resumimos na Figura 2.5 as conclusões que obtivemos até aqui.

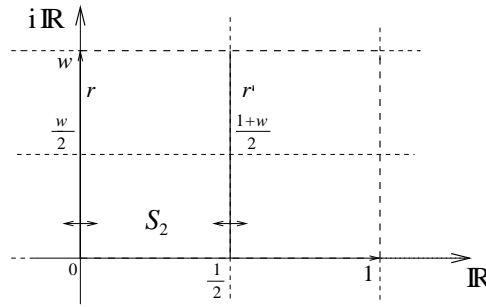


Figura 2.5: As retas da simetria S_2 .

A segunda conclusão é que esta simetria se traduz no automorfismo

$$S_2(\wp, \wp') = (\overline{\wp}, \pm \overline{\wp'}).$$

De fato, S_2 fixa os quatro pontos de ramificação de \wp e intercambia $\frac{1+w}{4}$ com $\frac{1+3w}{4}$, onde $\wp\left(\frac{1+w}{4}\right) = i$ e $\wp\left(\frac{1+3w}{4}\right) = -i$. Assim \wp é levado em $\overline{\wp}$ e \wp' em $\pm \overline{\wp'}$, pois

$$\overline{\wp}(\overline{\wp} + \tan \alpha)(\overline{\wp} - \cot \alpha) = \overline{\wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha)} = \overline{\wp'^2}.$$

Além disso, a aplicação de Gauss ao longo de r e r' toma valores reais.

A menos de movimentos rígidos e homotetias, podemos supor que $B = 1$, pois como vimos $\operatorname{Re} \int \phi_3 = 0$ sobre r e r' , e isto implica $\phi_3|_r \in i\mathbb{R}$. Com efeito, consideramos a curva $z(t)$ tal que $\wp(z(t)) = t$, $0 \leq t \leq \cot \alpha$. Então

$$\phi_3 = \frac{B dt}{\sqrt{t(t + \tan \alpha)(t - \cot \alpha)}} = \frac{\pm i B dt}{\sqrt{t(t + \tan \alpha)(\cot \alpha - t)}},$$

logo $B \in \mathbb{R}$. Como $|B| = 1$, segue-se que $B = \pm 1$. A constante $B = -1$ leva apenas à antípoda de R_λ com $B = 1$ pela origem. E assim, podemos fixar $B = 1$. Além disso, a

expressão da isometria S_2 é então fixada como

$$S_2(\wp, \wp') = (\overline{\wp}, -\overline{\wp'}).$$

Com efeito, tomemos $z(t) = i\mu(t)$, μ uma função real, tal que $0 \leq \mu(t) \leq \frac{|w|}{2}$, $\mu' > 0$ e $\wp(z(t)) = t$, $0 \leq t \leq \cot \alpha$. Então

$$\wp'(z(t))z'(t) = 1. \quad (2.28)$$

Temos que $z'(t) = i\mu'(t)$. Também temos, em $0 \leq t \leq \cot \alpha$, que

$$\wp'^2(z(t)) = t(t + \tan \alpha)(t - \cot \alpha) < 0,$$

então

$$\wp'(z(t)) = \pm i\sqrt{t(t + \tan \alpha)(\cot \alpha - t)}.$$

Usando (2.28) chegamos a

$$\wp'(z(t)) = -i\sqrt{t(t + \tan \alpha)(\cot \alpha - t)}.$$

Portanto, S_2 leva \wp' em $-\overline{\wp'}$.

Por fim, a última isometria é a simetria com respeito ao plano $y = 0$. Esta simetria S_3 induz uma involução anti-holomorfa da equação (2.26) que fixa todos os pontos de ramificação de g e que preserva a terceira coordenada da superfície. Tal transformação é dada por

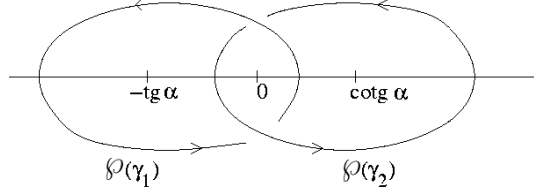
$$S_3(\wp, \wp') = (\overline{\wp}, \overline{\wp'}).$$

De fato, fixe a curva $z(t) = \eta(t)$, $0 \leq \eta(t) \leq \frac{1}{2}$, com $\eta'(t) > 0$. Assim \wp é levado em $\overline{\wp}$. Considere que $\wp(z(t)) = -t$, $0 \leq t \leq \tan \alpha$. Assim,

$$\wp'^2 = -t(-t + \tan \alpha)(-t - \cot \alpha) > 0.$$

Logo, \wp' é positiva ou negativa, mas $\wp'(z(t))z'(t) = -1$. Como $z'(t) > 0$, teremos que $\wp' < 0$. De qualquer modo, \wp' é real e portanto invariante sob a operação conjugada (S_3 deixa $z(t)$ invariante). Então \wp' é levado em $\overline{\wp'}$.

Vejamos que a representação de Weierstrass gera uma superfície em \mathbb{R}^3 que é invariante por uma translação. Denotemos $\overline{M_\alpha} = \{(\wp, \wp') \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} : \wp'^2 = \wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha)\}$.

Figura 2.6: As curvas γ_1 e γ_2 .

Como \overline{M}_α é um toro, então seu primeiro grupo de homologia é gerado por uma base $\mathcal{B} = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, onde γ_1 e γ_2 são levantamentos das curvas $\wp(\gamma_1)$ e $\wp(\gamma_2)$, respectivamente, representadas na Figura 2.6.

A ação das simetrias S_1 , S_2 e S_3 sobre a base \mathcal{B} e sobre a representação de Weierstrass implica

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \vec{0} \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \{y = 0\}.$$

Isto nos diz que a representação de Weierstrass (g, ϕ_3) gera uma imersão mínima bem definida em \mathbb{R}^3/T_λ . Chamaremos $M_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ a imagem de tal imersão.

Estas superfícies M_α , $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, possuem a topologia de um cilindro menos uma quantidade infinita e discreta de pontos. Em 1956, Shiffman introduziu uma função, atualmente conhecida como *função de Shiffman*, que expressa a variação da curvatura das seções planas da superfície. Mais precisamente, salvo homotetias, todo anel mínimo pode ser representado localmente por $\phi_3 = d\xi$ e $g = g(\xi)$ em que $\xi = x + iy$ é uma coordenada holomorfa em certa faixa vertical $\{0 \leq x \leq x_0, x_0 > 1\}$. Geometricamente, isto significa que o anel mínimo está contido na faixa horizontal $\{0 \leq z \leq x_0\} \subset \mathbb{R}^3$. As curvas de nível $z = c$ correspondem a $\xi_c(y) = c + iy$ e a curvatura k_c da curva plana neste nível é dada por

$$k_c(y) = \left[\frac{2|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \right] \Big|_{\xi=\xi_c(y)}. \quad (2.29)$$

Com efeito, sabemos que neste caso a superfície é dada por

$$X(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^t \left(\frac{1}{g} - g, \frac{i}{g} + ig, 2 \right) d(iy).$$

Vamos calcular $k = \frac{\|X' \times X''\|}{\|X'\|^3}$. Temos que:

$$\begin{aligned} X'(t) &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{i}{g} - ig \right), \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{g} - g \right), 0 \right) \text{ e} \\ X''(t) &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-\frac{ig'}{g^2} - ig' \right), \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g^2} - g' \right), 0 \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
X'(t) \times X''(t) &= \frac{1}{4} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{i}{g} - ig \right) \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g^2} - g' \right) - \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{g} - g \right) \operatorname{Re} \left(-\frac{ig'}{g^2} - ig' \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[-\operatorname{Im} \left(\frac{1}{g} - g \right) \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g^2} - g' \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{g} + g \right) \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g^2} + g' \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[-\operatorname{Im} \left(\frac{1}{g} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g^2} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{g} \right) \operatorname{Re} (g') + \operatorname{Im} (g) \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g^2} \right) - \operatorname{Im} (g) \operatorname{Re} (g') \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{g} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g^2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{g} \right) \operatorname{Im} (g') + \operatorname{Re} (g) \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g^2} \right) + \operatorname{Re} (g) \operatorname{Im} (g') \right].
\end{aligned}$$

Usando

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$(a - ib)(c + id) = (ac + bd) + i(ad - bc),$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
X'(t) \times X''(t) &= \frac{1}{4} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{1}{g} \cdot \frac{g'}{g^2} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{gg'}{g^2} \right) + \operatorname{Im} (\bar{g}g') \right] \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left[\frac{g'}{g} \left(\frac{1}{|g|^2} + 2 + |g|^2 \right) \right] = \left(\frac{|g|^{-1} + |g|}{2} \right)^2 \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right).
\end{aligned}$$

De modo análogo, e usando

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{g} \right) = \frac{\operatorname{Re}(g)}{|g|^2}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{g} \right) = -\frac{\operatorname{Im}(g)}{|g|^2},$$

obtemos

$$|X'(t)|^2 = \left(\frac{|g|^{-1} + |g|}{2} \right)^2.$$

Logo

$$|X'(t)|^3 = \left(\frac{|g|^{-1} + |g|}{2} \right)^3.$$

Deste modo,

$$k_c = \frac{2|g|}{1 + |g|^2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{g'}{g} \right) \right|,$$

que podemos generalizar para (2.29), admitindo que k_c pode assumir valores positivos e negativos.

A função de Shiffman se define como

$$u = \Lambda \frac{\partial k_c}{\partial y},$$

onde Λ é o fator conforme que associa a primeira forma fundamental ds^2 com o produto escalar do plano ξ , ou seja, $ds^2 = \Lambda^2 |d\xi|^2$. Em particular, $u \equiv 0$ equivale à superfície estar folheada por circunferências em planos horizontais. Assim, se provamos que $u \equiv 0$ em M_α , esta superfície terá que coincidir com uma R_λ para certo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vejamos primeiramente que

$$\frac{\partial |g|}{\partial y} = \frac{\operatorname{Re}(\bar{g}g')}{|g|} = \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{|g|^2 g'}{g}\right)}{|g|} = |g| \operatorname{Re}\left(\frac{g'}{g}\right).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_c}{\partial y} &= \frac{2|g| \operatorname{Re}\left(\frac{g'}{g}\right) (1 + |g|^2) - 2|g| \left[2|g| |g| \operatorname{Re}\left(\frac{g'}{g}\right)\right]}{(1 + |g|^2)^2} \operatorname{Im}\left(\frac{g'}{g}\right) + \frac{2|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left(\frac{g''g - g'^2}{g^2}\right) \\ &= \left[\frac{2|g| (1 + |g|^2) - 4|g|^3}{(1 + |g|^2)^2} \right] \operatorname{Re}\left(\frac{g'}{g}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{g'}{g}\right) + \frac{2|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left(\frac{g''g - g'^2}{g^2}\right). \end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$ab = \frac{1}{2} \operatorname{Im}((a + ib)^2),$$

segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_c}{\partial y} &= \frac{|g| (1 + |g|^2) - 2|g|^3}{(1 + |g|^2)^2} \operatorname{Im}\left[\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right] + \frac{2|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left(\frac{g''g - g'^2}{g^2}\right) \\ &= \frac{|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left[\frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2} \left(\frac{g'}{g}\right)^2 + 2 \left(\frac{g''g - g'^2}{g^2}\right)\right] \\ &= \frac{|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2} - 2\right) \left(\frac{g'}{g}\right)^2 + \frac{2g''}{g}\right] \\ &= \frac{|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left[\left(\frac{2}{1 + |g|^2} - 3\right) \left(\frac{g'}{g}\right)^2 + \frac{2g''}{g}\right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial k_c}{\partial y} = \frac{-2|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Im}\left[\left(-\frac{1}{1 + |g|^2} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{g'}{g}\right)^2 - \frac{g''}{g}\right]. \quad (2.30)$$

Note que, no caso do catenóide, onde $g = e^z$, é imediato que $\frac{\partial k_c}{\partial y} \equiv 0$. Agora, como havíamos explicado na introdução deste capítulo, vamos mostrar que se $g = \wp$, então existe λ tal que M_α coincide com R_λ .

Derivando $\wp'^2 = \wp(\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha)$ obtemos

$$2\wp'' = (\wp + \tan \alpha)(\wp - \cot \alpha) + \wp(\wp + \tan \alpha) + \wp(\wp - \cot \alpha),$$

logo

$$\frac{\wp''}{\wp} = \frac{3\wp}{2} - \frac{1}{2\wp} + \tan \alpha - \cot \alpha. \quad (2.31)$$

Como $g(\wp, \wp') = \wp$, temos $g' = \wp'$ e $g'' = \wp''$. Assim, substituindo (2.31) em (2.30) segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_c}{\partial y} &= \frac{-2|\wp|}{1 + |\wp|^2} \operatorname{Im} \left[\left(-\frac{\wp - \frac{1}{\wp} + \tan \alpha - \cot \alpha}{1 + |\wp|^2} \right) + \frac{3}{2} \left(\wp - \frac{1}{\wp} + \tan \alpha - \cot \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3\wp}{2} - \frac{1}{2\wp} + \tan \alpha - \cot \alpha \right) \right] \\ &= \frac{-2|\wp|}{1 + |\wp|^2} \operatorname{Im} \left[-\frac{\wp - \frac{1}{\wp}}{1 + |\wp|^2} - \frac{1}{\wp} \right] = \frac{2|\wp|}{1 + |\wp|^2} \operatorname{Im} \left[\frac{2\operatorname{Re}(\wp)}{1 + |\wp|^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Portanto $u = 0$, implicando que M_α é uma das superfícies R_λ .

Capítulo 3

Soluções especiais da equação diferencial das superfícies mínimas

Neste capítulo mostraremos que, com exceção do plano, o catenóide é a única superfície mínima que é de rotação, o helicóide é a única regrada e a superfície de Scherk é a única de translação, no sentido que possui uma folheação por curvas em planos verticais que diferem apenas pela terceira coordenada. Observe que o helicóide também é de translação, mas em outro sentido. Antes faremos um pequeno resumo histórico de como estas superfícies foram obtidas [4].

No contexto histórico a palavra mínima está relacionada com o problema de Lagrange proposto em 1761: *Dada uma curva C fechada e sem auto-interseções, achar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira*. Lagrange apresentou um método, conhecido hoje como Cálculo das Variações, para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como áreas, comprimentos, etc.

Achar exemplos de superfícies mínimas não é uma tarefa fácil. Para conseguir tais exemplos, ele utilizou o Método das Variações para superfícies descritas na forma $z = f(x, y)$ e obteve a equação (2.1), que é condição necessária para uma superfície ter área mínima. A única solução apresentada foi o plano. Em 1776, o físico-matemático Meusnier provou que (2.1) implicava $H \equiv 0$ e obteve duas soluções não triviais. Ele verificou se existiam soluções, que além de serem mínimas, fossem de rotação. Assim, reescreveu (2.1) numa equação ordinária e obteve como solução o catenóide. Para achar a outra solução, Meusnier

considerou que as curvas de nível fossem constantes, e obteve deste modo o helicóide.

Durante muito tempo, o plano, o helicóide e o catenóide foram os únicos exemplos conhecidos. Somente em 1835, Scherk obteve outras soluções, introduzindo em (2.1) a condição de que as variáveis podiam ser separadas, ou seja, ele supôs que $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Desta maneira, as derivadas parciais são substituídas por derivadas ordinárias e a solução é conhecida como a superfície de Scherk.

Outra solução que só apareceu mais tarde foi a superfície de Enneper, que é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right). \end{aligned}$$

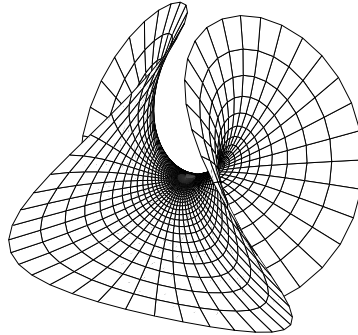


Figura 3.1: Superfície de Enneper.

3.1 O Catenóide

O catenóide é uma superfície de revolução S em \mathbb{R}^3 obtida por uma rotação da curva

$$\alpha(x) = \left(x, a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

em torno do eixo x . Tal superfície é mínima e completa, veja [4].

Teorema 3.1 *Toda superfície mínima de revolução em \mathbb{R}^3 é, a menos de movimentos rígidos, parte de um catenóide ou de um plano.*

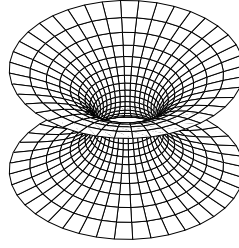


Figura 3.2: Catenóide.

Demonstração: Por um movimento rígido podemos supor que a superfície em \mathbb{R}^3 é tal que o seu eixo de rotação coincida com o eixo x . A superfície será então gerada pela curva

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

Se a função $x(t)$ é constante, então a superfície será parte de um plano ortogonal ao eixo x . Caso contrário, existe um ponto t_0 tal que $x'(t) \neq 0$ numa vizinhança de t_0 . Podemos então usar a representação $(x, y(x), 0)$ numa vizinhança de $\alpha(t_0)$. A parte da superfície obtida por rotação deste pedaço de curva pode ser representada por

$$X(x, v) = (x, y(x) \cos v, y(x) \sin v).$$

A condição $H = 0$ equivale a

$$1 + y'^2 = yy''. \quad (3.1)$$

Multiplicando $2y'$ em (3.1) obtemos

$$\frac{2y'y''}{1 + y'^2} = \frac{2y'}{y}. \quad (3.2)$$

Podemos integrar os dois lados de (3.2), o que resulta em

$$\log(1 + y'^2) = \log y^2 - \log a^2,$$

onde $a \neq 0$ é uma constante. Aplicando a exponencial chegamos em

$$1 + y'^2 = \frac{y^2}{a^2},$$

ou seja,

$$\frac{\frac{y'}{a}}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{a}.$$

Logo, $\operatorname{arccosh}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{x}{a} + b$, portanto

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

Segue-se que a curva α deve coincidir com o gráfico da função y acima, logo

$$X(x, v) = \left(x, a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \cos v, a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \sin v\right),$$

e o teorema está provado. ■

3.2 O Helicóide

Definição 3.2 *Um superfície regradada S em \mathbb{R}^3 é uma superfície regular que possui uma parametrização*

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow S \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u). \end{aligned}$$

onde α e γ são curvas em \mathbb{R}^3 com $\alpha' \neq 0$.

Definição 3.3 *O helicóide é definido por uma aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$X(u, v) = (u \cos av, u \sin av, bv),$$

onde a e b são constantes não-nulas. Geometricamente, o helicóide é gerado pelo movimento helicoidal em \mathbb{R}^3 agindo numa reta paralela ao plano de rotação.

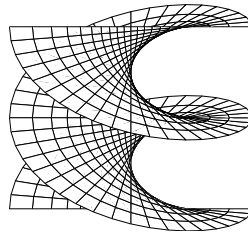


Figura 3.3: Helicóide.

Teorema 3.4 *Qualquer superfície mínima regradada de \mathbb{R}^3 é, a menos de um movimento rígido, parte de um helicóide ou parte de um plano.*

Demonstração: Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regrada, então M pode ser parametrizada localmente por

$$X(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

onde $\alpha(s)$ é uma curva perpendicular às retas de M e $\beta(s)$ descreve um campo vetorial, ao longo de α , na direção das retas passando por $\alpha(s)$.

Assumimos que α e β estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Um campo vetorial normal unitário para X é dado por

$$N = \frac{\alpha' \times \beta + t\beta' \times \beta}{\|X_s \times X_t\|}.$$

Por cálculos simples, verificamos que os coeficientes das formas fundamentais são:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\|X_s \times X_t\|} \{ \langle \alpha' \times \beta, \alpha'' \rangle + t(\langle \beta' \times \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \times \beta, \beta'' \rangle) + t^2 \langle \beta' \times \beta, \beta'' \rangle \}, \\ f &= \frac{1}{\|X_s \times X_t\|} \{ \langle \beta', \alpha' \times \beta \rangle + t \langle \beta', \beta' \times \beta \rangle \}, \quad g = 0, \quad F = 0, \quad G = 1 \quad \text{e} \\ E &= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2t \langle \beta', \alpha' \rangle + t^2 \langle \beta', \beta' \rangle. \end{aligned}$$

Segue-se que X é uma superfície mínima se, e somente se

$$\langle \alpha' \times \beta, \alpha'' \rangle + t(\langle \beta' \times \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \times \beta, \beta'' \rangle) + t^2 \langle \beta' \times \beta, \beta'' \rangle = 0.$$

Observando que a equação acima é um polinômio na variável t , obtemos

$$\begin{aligned} (i) \quad & \langle \alpha' \times \beta, \alpha'' \rangle = 0, \\ (ii) \quad & \langle \beta' \times \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \times \beta, \beta'' \rangle = 0, \\ (iii) \quad & \langle \beta' \times \beta, \beta'' \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

De (3.3)(i) segue-se que α'' deve pertencer ao plano gerado por α' e β . Mas, uma vez que α é parametrizada pelo comprimento de arco, α'' e α' são perpendiculares. Logo, α'' é paralelo a β . Segue-se que $\langle \beta' \times \beta, \alpha'' \rangle = 0$ e assim, a equação (3.3)(ii) resume-se a $\langle \alpha' \times \beta, \beta'' \rangle = 0$. Portanto concluímos que β'' pertence simultaneamente aos planos gerados por α' e β , e por β' e β . A interseção desses dois planos contém ao menos o subespaço gerado pelo vetor β .

Se existir um ponto onde β'' é não-paralelo a β , então numa vizinhança deste ponto, os dois planos coincidem e α' é paralelo a β' . Deste modo, nesta vizinhança temos que $(\beta \times \alpha')' = \beta' \times \alpha' + \beta \times \alpha'' = 0$. Logo, o plano gerado por β e α' é constante.

Consequentemente, α é uma curva plana e a superfície descrita por X é um plano naquela vizinhança. Devido à analiticidade das superfícies mínimas, então é plano em toda a extensão de α .

Se β'' é paralelo a β em todos os pontos e α' e β' não são paralelos em algum ponto, então isto ocorre numa vizinhança deste ponto. Afirmamos que a curvatura e a torção de α são constantes. De fato, conforme [9], uma vez que $k = \langle \alpha'', \beta \rangle$ obtemos

$$\pm \frac{dk}{ds} = \langle \alpha'', \beta \rangle' = -\langle \alpha', \beta' \rangle' = -\langle \alpha'', \beta' \rangle - \langle \alpha', \beta'' \rangle = 0.$$

Como $\pm \tau = \langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle$ temos

$$\pm \frac{d\tau}{ds} = \langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle' = \langle \alpha'' \times \beta', \beta \rangle + \langle \alpha' \times \beta'', \beta \rangle + \langle \alpha' \times \beta', \beta' \rangle = 0.$$

Assim, τ e k são constantes. Segue-se que, a menos de movimento rígido, α pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = (A \cos as, A \sin as, bs),$$

onde $A^2 a^2 + b^2 = 1$. Como β é paralelo a α'' , $\beta(s) = \pm(\cos as, \sin as, 0)$. Se tomarmos $u = A \pm t$ e $v = s$, então obteremos

$$X(u, v) = (u \cos av, u \sin av, bv).$$

Portanto, M é parte de um helicóide. ■

Consideremos uma superfície na forma não-paramétrica $(x, y, f(x, y))$. Vamos provar que se f é harmônica, então a superfície é o helicóide. Seja S uma superfície definida por uma aplicação $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $f \in C^2$ e Ω é um aberto simplesmente conexo do \mathbb{R}^2 . Considere $f_x = p$ e $f_y = q$. Sendo f harmônica, existe f^* harmônica conjugada tal que $F = f + if^*$ é analítica. Deste modo $\frac{\partial F}{\partial(x+iy)} = p - iq$ é analítica. Analisaremos os casos em que a derivada parcial de $\frac{\partial F}{\partial(x+iy)}$ é nula e não-nula.

Primeiro Caso: $\frac{\partial^2 F}{\partial(x+iy)^2} = p_x - iq_x = -q_y - ip_y \equiv 0$.

Temos assim que $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$. Logo f é linear.

Segundo Caso: $\frac{\partial^2 F}{\partial(x+iy)^2} \neq 0$.

Neste caso existe localmente uma aplicação biholomorfa $(x, y) \leftrightarrow (p, -q)$. Assim $(x - iy)(p + iq)$ holomorfa implica $x_p = -y_q$. Mas $x dp + y dq$ é exata pois $d(pdx + qdy) =$

$(p_y - q_x)dy \wedge dx = 0$. logo $pdx + qdy$ é fechada num simplesmente conexo, portanto exata. Mostraremos que $pdx + qdy$ ser exata implica que $xdp + ydq$ também é exata. Dada uma curva simples fechada γ , denotamos $\Gamma = (p, q)(\gamma)$ a sua imagem. Logo, usando o Teorema de Green temos

$$\oint_{\Gamma} x(p, q)dp + y(p, q)dq = \iint_{\text{int}\Gamma} (y_p - x_q)dpdq = \iint_{\text{int}\gamma} (y_p|_{(x,y)} - x_q|_{(x,y)}) \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} dxdy.$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} x_p & x_q \\ y_p & y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} q_y & -q_x \\ -p_y & p_x \end{bmatrix},$$

logo

$$y_p = \frac{-p_y}{\begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad x_q = \frac{-q_x}{\begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix}}.$$

Assim

$$\oint_{\Gamma} x(p, q)dp + y(p, q)dq = \iint_{\text{int}\gamma} (-p_y + q_x) dxdy.$$

Como $pdx + qdy$ é exata, pelo Teorema de Green temos

$$0 = \oint_{\gamma} pdx + qdy = \iint_{\text{int}\gamma} (-p_y + q_x) dxdy,$$

o que implica

$$\oint_{\Gamma} x(p, q)dp + y(p, q)dq = 0.$$

Portanto $xdp + ydq$ é exata.

Deste modo, existe ν tal que $x = \nu_p$ e $y = \nu_q$. Agora, $\nu_{pp} + \nu_{qq} = x_p + y_q = 0$, implicando $\Delta\nu = 0$. Considere $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ e denote $\frac{q}{W} = P$, $-\frac{p}{W} = Q$. Como S é mínima, vale a equação (2.1), ou equivalentemente,

$$-Q_x + P_y = 0.$$

Pelo teorema de Green

$$\oint_{\gamma} Pdx - Qdy = \iint_{\text{int}\gamma} (Q_x - P_y) dxdy = 0,$$

assim $Pdx + Qdy$ é exata. Repetindo o procedimento anterior, concluímos que $xdP + ydQ$ é exata. Portanto

$$d(xdP + ydQ) = d\left(\nu_p d\left(\frac{q}{W}\right) - \nu_q d\left(\frac{p}{W}\right)\right) = 0,$$

ou equivalentemente

$$[(1 + p^2)\nu_{pp} + 2pq\nu_{pq} + (1 + q^2)\nu_{qq}] dp \wedge dq = 0. \quad (3.4)$$

Como ν é harmônica, temos

$$p^2\nu_{pp} + 2pq\nu_{pq} + q^2\nu_{qq} = 0.$$

Ao longo das curvas

$$\tau(s) = (p, q)(s) = (1 + s)(p_0, q_0),$$

temos a composta

$$\nu(\tau(s)) = \nu(p(s), q(s)).$$

Como $p(s) = (1 + s)p_0$ e $q(s) = (1 + s)q_0$, então $p' = p_0$ e $q' = q_0$. Derivando $\nu(\tau(s))$ em relação a s temos

$$\frac{d}{ds}\nu(\tau(s)) = \nu_p p' + \nu_q q' = \nu_p p_0 + \nu_q q_0,$$

e a derivada segunda é

$$\nu'' = \frac{d^2}{ds^2}\nu(\tau(s)) = \nu_{pp}p_0^2 + 2\nu_{pq}p_0q_0 + \nu_{qq}q_0^2. \quad (3.5)$$

De (3.5) obtemos $\nu'' = 0$ ao longo da curva $\tau(s)$, ou seja, $\nu(\tau(s)) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Temos também que todas as retas $\tau(s)$ passam pela origem. Logo, é possível tomar a reparametrização conforme

$$p + iq = e^u(\cos v + i \sin v).$$

Deste modo, $\tilde{\nu}(u, v) := \nu(p(u, v), q(u, v))$ é também harmônica, com $\tilde{\nu}(u, v) = a(v)e^u + b(v)$. Logo

$$0 = \tilde{\nu}_{uu} + \tilde{\nu}_{vv} = (a + a_{vv})e^u + b_{vv} = 0.$$

Obtemos assim $(a + a_{vv}) = 0$ e $b_{vv} = 0$, cujas soluções são $a = A_1 \cos v + A_2 \sin v$ e $b = B_1 + B_2 v$. Portanto,

$$\tilde{\nu}(u, v) = A_1 e^u \cos v + A_2 e^u \sin v + B_1 + B_2 v,$$

implicando assim

$$\nu = A_1 p + A_2 q + B_1 + B_2 \arctan \frac{q}{p}.$$

Logo obtemos

$$x = A_1 - \frac{B_2 q}{p^2 + q^2} \quad \text{e} \quad y = A_2 + \frac{B_2 p}{p^2 + q^2}.$$

Sendo $B_2 \neq 0$, pois $(x, y) \leftrightarrow (p, q)$ é anti-biholomorfa, temos que

$$f_x = p = \frac{B_2(y - A_2)}{(x - A_1)^2 + (y - A_2)^2} \quad \text{e} \quad f_y = q = -\frac{B_2(x - A_1)}{(x - A_1)^2 + (y - A_2)^2}.$$

Portanto

$$f = B_2 \arctan \frac{x - A_1}{y - A_2}.$$

Concluimos assim que o helicóide é a única superfície mínima harmônica.

3.3 A superfície de Scherk

Definição 3.5 *A superfície de Scherk é definida pela aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$X(u, v) = \left(u, v, \log \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right) \right).$$

Observemos que apenas a parte da superfície sobre um quadrado aberto de lado $\frac{\pi}{2}$ pode ser representada pela função. As retas verticais sobre os vértices destes quadrados pertencem à superfície. Pelo Teorema 2.5, superfícies mínimas contendo uma reta são simétricas por rotação de 180° em relação à reta. Portanto a superfície se estende de modo a cobrir uma parte do plano constituída por quadrados alternados de lado $\frac{\pi}{2}$, ver [4].

Teorema 3.6 *Considere a superfície mínima M gerada pela aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

onde $h(u, v) = f(u) + g(v)$. Assim, ou M é um plano ou existe uma constante não-nula a tal que

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log(\cos au) \quad \text{e} \quad g(v) = \frac{1}{a} \log(\cos av),$$

ou equivalentemente,

$$h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos av}{\cos au} \right).$$

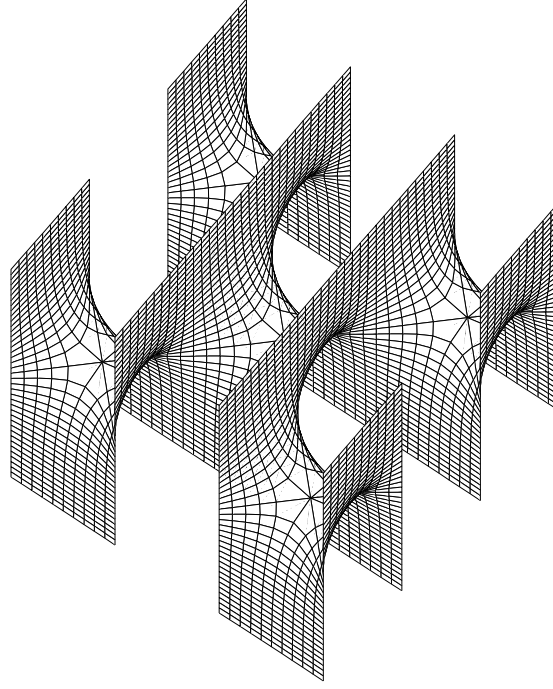


Figura 3.4: Superfície de Scherk.

Demonstração: Sendo M uma superfície mínima temos que (2.1) deve ser satisfeita. Como $h_{uu} = f''(u)$, $h_{uv} = 0$ e $h_{vv} = g''(v)$, obtemos que (2.1) reduz-se a

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = -\frac{g''(v)}{1 + g'(v)^2}. \quad (3.6)$$

As variáveis u e v são independentes, assim cada lado de (3.6) deve ser igual a uma constante a . Se $a = 0$ então f e g são lineares e M é parte de um plano. Caso contrário, as duas equações

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = a, \quad -\frac{g''(v)}{1 + g'(v)^2} = a$$

geram as soluções desejadas. De fato, Considere $f''(u) - a - af'(u)^2 = 0$. Utilizando o método de separação de variáveis, obtemos que $f'(u) = \tan(au + c)$, e assim $f(u) = -\frac{1}{a}\log(\cos(au + c))$. Fazendo a constante c igual a zero, segue-se o resultado afirmado. A dedução de g é análoga. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*. Stanford University, New York, 1969.
- [2] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [3] J. L. Barbosa, M. do Carmo, *On the size of a stable minimal surface in \mathbb{R}^3* . Amer. J. Math., 98 (2), 1976, pag. 515 - 528.
- [4] M. do Carmo, *Superfícies mínimas*. 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [5] D. Hoffman, H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. Geometry V. Encyclopaedia of Math. (R.Osserman, ed.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997, pag. 5 - 93.
- [6] F. Martín, J. Pérez, *Superfícies minimales foliadas por circunferencias: los ejemplos de Riemann*. La Gaceta de la RSME, 6 (3), 2003, pag. 571 - 596.
- [7] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces I*. Grudl. der Mathem. Wiss. 295, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.
- [8] H. Karcher, *Construction of minimal surfaces*. Surveys in Geometry, 1989, pag. 1- 96; University of Tokyo, 1989, and Lecture Notes 12, SFB256, Bonn, 1989.
- [9] L. Barbosa, A. G. Colares, *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . Lecture Notes Math., 1195, Springer-Verlag, 1986.
- [10] M. Shiffman, *On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes*. Ann. of Math., 63 (1), 1956, pag. 77 - 90.

-
- [11] L. Euler, *Recherches sur la courbure de surfaces*. Mémoire de l'académie des sciences de Berlin, 16, 1767, pag. 119 - 143.
 - [12] J. B. Meursnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mémoire des savants étrangers, 10, 1785, pag. 477 - 510.
 - [13] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Band I und II, Springer, Berlin, 1890.
 - [14] C. Costa, *Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends*. Bol. Soc. Bras. Mat., 15, 1984, pag. 47 - 54.